# Statistik

W. Sacher

## für Benutzer programmierbarer Taschenrechner

Mit 108 Programmen und 14 Tabellen

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage

Oldenbourg

## Fehlerberichtigung

---

In Formel (29) auf S. 10 muß vor dem Wurzelzeichen „SD" wegfallen.

Der Autor

**Richtige Formel:**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,SD^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\,SD^2}\right)} \quad ; \qquad (29)$$

$\pi$ = die Kreiszahl 3,141592...,
e = die Basis der natürlichen Logarithman 2,718281...

# Statistik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner

Von Werner Sacher

Mit 108 Programmen und 14 Tabellen

Zweite, völlig neu bearbeitete Auflage

R. Oldenbourg Verlag München Wien 1980

**CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek**

**Sacher, Werner:**
Statistik für Benutzer programmierbarer
Taschenrechner : mit 108 Programmen u. 14 Tab. /
Werner Sacher. – 2., völlig neu bearb. Aufl. –
München, Wien : Oldenbourg, 1980.
1. Aufl. u.d.T.: Sacher, Werner: Einführung in
die Statistik für Benutzer programmierbarer
Taschenrechner.
ISBN 3-486-20762-8

© 1980 R. Oldenbourg Verlag GmbH, München

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege sowie der Speicherung und Auswertung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben auch bei auszugsweiser Verwertung vorbehalten. Werden mit schriftlicher Einwilligung des Verlages einzelne Vervielfältigungsstücke für gewerbliche Zwecke hergestellt, ist an den Verlag die nach § 54 Abs. 2 Urh.G. zu zahlende Vergütung zu entrichten, über deren Höhe der Verlag Auskunft gibt.

Druck: Hofmann-Druck KG, Augsburg
Bindearbeiten: R. Oldenbourg Graphische Betriebe GmbH, München

ISBN 3-486-20762-8

# Inhalt

Vorwort zur 2. Auflage . . . . . XI

Hinweise für den Benutzer . . . . . XII

## I. Teil: Theoretische Grundlagen

**1. Analyse von Verteilungen** . . . . . 1

1.1. Statistische Kennwerte von Verteilungen . . . . . 1

*1.1.1. Mittelwerte . . . . . 1
*1.1.2. Variabilitätsmaße . . . . . 3
1.1.3. Schiefe und Exzeß . . . . . 7

1.2. Vergleich von Verteilungen . . . . . 8

1.2.1. Vergleich empirischer Verteilungen . . . . . 8
*1.2.1.1. Prozentränge . . . . . 8
*1.2.1.2. Standardwerte . . . . . 8

1.2.2. Vergleich einer empirischen Verteilung mit einer theoretischen Verteilung . . . . . 9
1.2.2.1. Ausgewählte Zufallsverteilungen . . . . . 9
*1.2.2.2. Die Chi-Quadrat-Probe . . . . . 12

**2. Prüfung von Unterschieden** . . . . . 16

2.1. Fehlertheorie . . . . . 16

*2.1.1. Alpha- und Beta-Fehler . . . . . 16
*2.1.2. Standardfehler . . . . . 17
*2.1.3. Vertrauensbereiche . . . . . 17

2.2. Prüfverfahren . . . . . 19

2.2.1. Prüfverfahren für intervallskalierte Daten . . . . . 20
*2.2.1.1. t-Test für unabhängige Stichproben . . . . . 20
*2.2.1.2. t-Test für abhängige Stichproben . . . . . 21

+2.2.1.3. Vergleich einer Stichprobenvarianz mit einer Populationsvarianz . . . 22
+2.2.1.4. Vergleich zweier Stichprobenvarianzen . . . . . 22

2.2.2. Prüfverfahren für ordinalskalierte Daten . . . . . 23
*2.2.2.1. Der U-Test von Mann-Withney . . . . . 23
+2.2.2.2. Der H-Test bzw. die Rangvarianzanalyse nach Kruscal & Wallis . . . . 25
+2.2.2.3. Die Rangvarianzanalyse von Friedman . . . . . 25
+2.2.2.4. Der Wilkoxen-Test . . . . . 26
*2.2.2.5. Der Vorzeichen-Test . . . . . 27
*2.2.2.6. Der Median-Test . . . . . 28

2.2.3. Prüfverfahren für nominalskalierte Daten . . . . . 28
*2.2.3.1. Die Vierfelder-Tafel . . . . . 29
*2.2.3.2. Die Kontingenztafel . . . . . 30
+2.2.3.3. Der McNemar-Test . . . . . 32
+2.2.3.4. Der Cochran-Test . . . . . 33
2.2.3.5. Die Konfigurations-Frequenz-Analyse . . . . . 34

**3. Prüfung von Zusammenhängen** . . . . . 38

*3.1. Die Produkt-Moment-Korrelation . . . . . 38
+*3.2. Die Rangkorrelation . . . . . 39
+*3.3. Der Phi-Koeffizient . . . . . 39
+3.4. Der Kontingenz-Koeffizient . . . . . 41
3.5. Korrelationen mit dichotomen Variablen . . . . . 41
3.6. Der Konkordanz-Koeffizient . . . . . 43
+3.7. Mittlere Korrelationen . . . . . 45
3.8. Partialkorrelationen . . . . . 45

**4. Regressionsrechnung** . . . . . 47

*4.1. Die lineare Regression . . . . . 47
4.2. Nichtlineare Regression . . . . . 49
4.2.1. Quadratische Regression . . . . . 49
4.2.2. Die kubische Regression . . . . . 50
+4.2.3. Die Potenzregression . . . . . 52
+4.2.4. Die Exponentialregression . . . . . 54
+4.2.5. Die logarithmische Regression . . . . . 55

+4.3. Regressionsgüte . . . . . 56
4.4. Multiple Regression . . . . . 56

4.4.1. Multiple Regression mit zwei unabhängigen Variablen und einer abhängigen Variablen . . . 56
4.4.2. Multiple Regression mit drei Prädiktorvariablen und einer Kriteriumsvariablen . . . 58
4.4.3. Signifikanzprüfung . . . 60

**5. Faktorenanalyse** . . . 63

+5.1. Erstellen einer Korrelationsmatrix . . . 63
5.2. Faktorisierbarkeit einer Matrix . . . 64
+5.3. Extraktion der Faktoren . . . 65
5.4. Rotation der Faktoren . . . 68

**6. Varianzanalytische Methoden** . . . 71

6.1. Varianzanalyse mit unabhängigen Stichproben . . . 71
*6.1.1. Die einfaktorielle Varianzanalyse . . . 71
+6.1.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse . . . 75
6.1.3. Varianzanalysen mit ungleichen Stichprobengrößen 79

6.2. Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben . . . 82
+6.2.1. Einfaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung . . . 82
6.2.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung . . . 85

**7. Skalierungsverfahren** . . . 89

7.1. Erstellung von Intervallskalen . . . 89
*7.1.1. Rating . . . 89
+7.1.2. Paarvergleich . . . 90
7.1.3. Likert-Skala . . . 91
7.1.4. Häufigkeitsanalyse nach Guttmann 93

7.2. Erstellung von Rangskalen 94
*7.2.1. Rangordnungsverfahren . . . 94
7.2.2. Rangordnung durch Paarvergleich . . . 96

*7.3. Weitere Verfahren . . . 100

**II. Teil: Programme** . . . . . 101

**Programme in algebraischer Eingabelogik (AOS)** . . . . . 106

**Programme in umgekehrter polnischer Notation (UPN)** . . . . . 151

| | AOS | UPN |
|---|---|---|
| Programm 1: Arithm. Mittel, Varianz, Standardabweichung | 106 | 151 |
| Programm 2: Median/Quartile/Centile | 106 | 152 |
| Programm 3: Schiefe und Exzeß | 107 | 153 |
| Programm 4: Prozentränge | 108 | 153 |
| Programm 5: Standardisierung von Verteilungen | 109 | 154 |
| Programm 6: Standardisierung von Verteilungen | 109 | 155 |
| Programm 7: Binomialverteilung | 110 | 155 |
| Programm 8: Poissonverteilung | 111 | 156 |
| Programm 9: Normalitätsprüfung | 112 | 157 |
| Programm 10: Unterschied von Prozentangaben | 113 | 158 |
| Programm 11: t-Test für unabhängige Stichproben | 113 | 158 |
| Programm 12: t-Test für abhängige Stichproben | 114 | 159 |
| Programm 13: z-Wert für U-Test mit unverbundenen Rängen | 114 | 159 |
| Programm 14: z-Wert für U-Test mit verbundenen Rängen | 115 | 160 |
| Programm 15: Wilcoxen-Test | 115 | 160 |
| Programm 16: Vorzeichen-Test für $N \leqslant 25$ | 116 | 161 |
| Programm 17: 4-Felder-Chi-Quadrat | 117 | 162 |
| Programm 18: Kontingenz-Tafel | 117 | 162 |
| Programm 19: Cochran-Test | 118 | 163 |
| Programm 20: KFA für 3 alternative Merkmale | 119 | 164 |
| Programm 21: KFA für 4 alternative Merkmale | 120 | 165 |
| Programm 22: KFA für 5 alternative Merkmale | 121 | 166 |
| Programm 23: KFA für 3 dreifach gestufte Merkmale | 122 | 167 |
| Programm 24: Produkt-Moment-Korrelation | 123 | 168 |
| Programm 25: Korrelationsmatrix für 6 Variablen | 123 | 168 |
| Programm 26: Rangkorrelation | 126 | 171 |
| Programm 27: Durchschnittliche Rangkorrelation | 126 | 171 |
| Programm 28: Konkordanzkoeffizient | 127 | 172 |
| Programm 29: Durchschnittliche Korrelation bei gleichen n | 128 | 173 |
| Programm 30: Durchschnittliche Korrelation bei ungleichen n | 128 | 174 |
| Programm 31: Partialkorrelation | 129 | 174 |
| Programm 32: Signifikanz-Test für den Unterschied zweier Korrelationen | 129 | 175 |
| Programm 33: Lineare Regression | 130 | 176 |
| Programm 34: Vertrauensbereich für lineare Regression | 131 | 176 |
| Programm 35: Quadratische Regression | 132 | 177 |
| Programm 36: Kubische Regression | 133 | 178 |

| | AOS | UPN |
|---|---|---|
| Programm 37: Potenzregression | 136 | 181 |
| Programm 38: Exponentialregression | 136 | 181 |
| Programm 39: Logarithmische Regression | 136 | 182 |
| Programm 40: Regressionsgüte | 137 | 183 |
| Programm 41: Multiple Regression für 2 unabhängige Variablen | 138 | 185 |
| Programm 42: Regression dreier unabhängiger Variablen mit einer abhängigen | 139 | 186 |
| Programm 43: Invertierte Elemente einer 3 x 3-Matrix | 141 | 187 |
| Programm 44: Restkorrelationsmatrix | 142 | 188 |
| Programm 45: Rotation von Faktoren | 142 | 189 |
| Programm 46: 1-faktorielle Varianzanalyse | 143 | 190 |
| Programm 47: 2-faktorielle Varianzanalyse | 144 | 190 |
| Programm 48: 1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen | 105 | 191 |
| Programm 49: 2-fache Varianzanalyse mit Meßwiederholungen | 145 | 193 |
| Programm 50: Bartlett-Test | 146 | 194 |
| Programm 51: Rating | 147 | 195 |
| Programm 52: Likert-Skala | 148 | 196 |
| Programm 53: Guttmann-Skala | 149 | 197 |
| Programm 54: Konsistenz mit Signifikanztest | 150 | 198 |

## III. Teil: Tabellen

1. Flächenstücke und Ordinaten der Gaußschen Normalverteilungs-Kurve . . 199
2. Kritische Werte der Chi-Quadrat-Verteilung . . . . . 202
3. Kritische Werte der t-Verteilung . . . . . 203
4. Kritische Werte der F-Verteilung . . . . . 203
5. Kritische Werte für den U-Test . . . . . 210
6. Kritische Werte für den H-Test . . . . . 212
7. Kritische Werte für $Chi^2$ Friedman . . . . . 214
8. Kritische Werte für den Wilcoxen-Test . . . . . 216
9. Kritische Werte für einen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten . . . 216
10. Fishers Z-Werte für Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten . . . . . 217
11. Maximalwerte für Kontingenzkoeffizienten . . . . . 217
12. Kritische Werte für den Zähler des Konkordanzkoeffizienten . . . . . 218
13. Kritische Werte für den $F_{max}$-Test . . . . . 218
14. Prozentränge und Skalenplätze nach Hull . . . . . 219

Abkürzungen . . . . . 221

Literaturhinweise . . . . . 223

Sachregister . . . . . 224

# Vorwort zur 2. Auflage

Dieses Buch richtet sich hauptsächlich an Leser, die empirisch arbeiten möchten. Es ist daher betont pragmatisch konzipiert. Auf die mathematische Begründung und Ableitung der Verfahren wurde kein Wert gelegt. Trotz der Einwendungen mancher Rezensenten erscheint es dem Verfasser nach wie vor legitim, die gängigen Verfahren in handlicher Form für einen Personenkreis zusammenzustellen, der sie hauptsächlich anzuwenden hat, und dabei vorauszusetzen, daß dieser bereits über die mathematischen Grundlagen verfügt.
Es war und ist eine zentrale Absicht des Buches, die praktische Verwendbarkeit durch die Beigabe einer Programmsammlung für die gängigen programmierbaren Taschenrechner weiter zu erhöhen. Bei dieser Orientierung des Buches spielte die Überlegung eine Rolle, daß nicht jedermann Zutritt zu einem Rechenzentrum hat bzw. die anfallenden Kosten tragen kann. Außerdem gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, die mit Papier und Bleistift äußerst mühevoll abzuwickeln sind, die andererseits aber den Einsatz einer EDV-Anlage noch nicht unbedingt rechtfertigen.
Die Programme können zugleich eine Hilfe zum besseren Verständnis der Verfahren sein: Leser, welche das Buch so verwenden möchten, sollten allerdings die Programme als Lösungsvorschläge des Verfassers ansehen und sich die Mühe machen, eigene Programme zu schreiben bzw. die hier vorgelegten nach ihren Bedürfnissen abzuändern.
Die mittlerweile auf dem Markt erschienenen Rechner ermöglichten für die zweite Auflage die Einbeziehung weiterer Verfahren, die mit den technischen Möglichkeiten der älteren Modelle noch nicht realisierbar waren. Dafür mußten einige Passagen der älteren Fassung fallen.
Mit Rücksicht auf eine gewisse Polarisierung des Angebots wird nunmehr jedes Programm in einer Variante für algebraische Eingabelogik (AOS) und in einer solchen für umgekehrte polnische Notation (UPN) vorgelegt. Die Programme laufen damit auf den handelsüblichen Rechnern, ohne daß Abänderungen erforderlich wären. [1)]
Im Sinne eines weiteren Bemühens um Verständlichkeit wurden nun fast durchgehend Beispielrechnungen eingefügt. Der Verfasser hofft, dadurch einer gedankenlosen Verwendung der Programme etwas vorbeugen zu können. Außerdem kann das Buch nun auch ohne den Einsatz eines programmierten Taschenrechners als Anleitung zur Verwendung statistischer Verfahren mit Gewinn gelesen werden.

Insgesamt entstand eine völlig neue Fassung, die mit der ersten Auflage noch nicht einmal 5% Text gemeinsam haben dürfte.
Texas-Instruments/Freising und Hewlett&Packard/München-Taufkirchen stellten dem Verfasser ihre Geräte in großzügiger Weise für die Programmkonstruktion zur Verfügung. Besonders den zuständigen Abteilungsleitern, den Herren Nielsen und Baron, sei für diese Hilfe herzlich gedankt.

München, Sommer 1979
Werner Sacher

---

1) Zum Zeitpunkt des Manuskriptabschlusses TI-58, TI-58 C, TI-59 und HP 19 C, HP 67, HP 97 sowie mit Einschränkungen TI-57 und HP 29 C.

# Hinweise für den Benutzer

Die behandelten Verfahren sind hinsichtlich ihrer Schwierigkeit und ihrer allgemeinen Bedeutung im Inhaltsverzeichnis gekennzeichnet: Ein Leser ohne statistische Vorkenntnisse sollte sich zunächst einmal die Abschnitte mit vornehmen, die sowohl die einfacheren als auch die grundlegenden Verfahren enthalten. Die mit einem + versehenen Textteile führen in weitere Verfahren ein, die heute zunehmende Verbreitung finden und ebenfalls noch relativ leicht verständlich sind. Die übrigen Passagen sind Verfahren und Problemen gewidmet, die bereits Vorkenntnisse voraussetzen und höhere Ansprüche stellen. Der noch nicht eingelesene Benutzer sollte sie erst zuletzt durcharbeiten.

# I. Teil: Theoretische Grundlagen

## 1. Analyse von Verteilungen

### 1.1. Statistische Kennwerte von Verteilungen

#### 1.1.1. Mittelwerte

Verteilungen sind zum einen charakterisiert durch ihre Mittelwerte. Der wohl am häufigsten verwendete und gebräuchlichste Mittelwert ist das ARITHMETISCHE MITTEL, das wir erhalten, wenn wir alle Einzelwerte addieren und die Summe durch die Anzahl der Werte teilen. Mathematisch gilt die Beziehung

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \qquad \text{wobei } n = \text{Anzahl der verrechneten X-Werte.} \qquad (1)$$

Mit Hilfe von festprogrammierten Funktionen können wir $\bar{X}$ jederzeit bequem aus ungeordneten Daten der Urliste ermitteln. Zur Berechnung bedarf es also nicht unbedingt der Erstellung einer Tabelle. Sie wird aber in einer wissenschaftlichen Arbeit oft aus Gründen der Darstellung nötig sein. Muß man ohnehin eine Tabelle anlegen, so kann man mittels Programm 1 $\bar{X}$ auch aus den gruppierten Daten berechnen. In diesem Falle liegt die folgende Formel zugrunde:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{c} f_i}, \qquad \text{wobei } IM = \text{Intervallmitten}, \quad f = \text{Häufigkeit im Intervall.} \qquad (2) \quad (Pr.1)$$

Ziemlich selten werden wir in die Lage kommen, das GEOMETRISCHE MITTEL berechnen zu müssen, d.h. alle Werte miteinander zu multiplizieren und, wenn N die Anzahl der Werte ist, die N-te Wurzel aus dem Produkt zu ziehen. In der Statistik benötigt man das geometrische Mittel z.B. bei bestimmten Skalierungsverfahren (vgl. S.88f ). Die zugehörige Formel lautet:

$$MG = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i}, \qquad \text{wobei } \prod = \text{eine fortlaufende Faktorenkette ist zu bilden,} \quad n = \text{Anzahl der verrechneten X-Werte (negative Werte sind nicht zulässig!).} \qquad (3)$$

Ebenfalls wenig gebräuchlich ist das HARMONISCHE MITTEL. Es findet z.B. bei der Mittelung von Verhältniszahlen (km/h, kp/cm$^2$) und bei bestimmten Problemen der Varianzanalyse Anwendung:

$$HM = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \quad . \qquad (4)$$

DAS ARITHMETISCHE MITTEL, DAS GEOMETRISCHE MITTEL UND DAS HARMONISCHE MITTEL SOLLTEN NUR ÜBER WIRKLICHE MESSWERTE BERECHNET WERDEN, BEI DENEN GLEICHEN ABSTÄNDEN IM MESSBEREICH GLEICHE ABSTÄNDE IM BEREICH DER GEMESSENEN PHÄNOMENE ENTSPRECHEN.

Dieser Einschränkung unterliegt nicht der MEDIAN bzw. ZENTRALWERT. Der Median ist jener Wert, der genau in der Mitte aller Werte liegt, wenn man diese in einer Rangfolge anordnet. Bei einer Wertreihe von

1 - 2 - 2 - 4 - 5 - 6 - 9

wäre 4 der Median, da unterhalb und oberhalb von ihm jeweils 3 Werte liegen. Etwas schwieriger gestaltet sich diese Prozedur bei einer geraden Anzahl von Werten, etwa

2 - 3 - 4 - 5 - 5 - 6 - 7 - 7 - 8 - 9 .

Die Mitte liegt dann zwischen 5 und 6, d.h. der Median wäre 5.5 .
Die Prozedur wird sehr schnell zeitraubend und umständlich, so daß man sich von jeher normalerweise einer Näherungsrechnung bedient, die allerdings eine Tabellierung der Werte voraussetzt.
Als Beispiel mag die unten zusammengestellte Verteilung von Testpunkten dienen. Darin ist die kumulierte Häufigkeit jene Häufigkeit, die sich in einem Intervall ergibt, wenn wir jeweils alle bis dahin vorgefundenen Häufigkeiten in aufsteigender Reihenfolge summieren. Aus den kumulierten Häufigkeiten ist ersichtlich, daß in der Gruppe der Schüler mit 12 bis 15 Punkten die 50%-Grenze der Klasse (17,5P.) überschritten wird, und zwar um 27 - 17,5 = 9,5 Schüler.

| Intervall-Code | Punkte | Schüler (= f) | kumulierte Häufigkeit (= $f_c$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 - 3 | 2 | 2 |
| 2 | 4 - 7 | 6 | 8 |
| 3 | 8 - 11 | 8 | 16 |
| 4 | 12 - 15 | 11 | 27 |
| 5 | 16 - 19 | 5 | 32 |
| 6 | 20 - 23 | 3 | 35 = N |

Den Median ermitteln wir dann durch folgende Näherungsrechnung:

$$Z = l_{50} - \frac{\Delta_{50}}{f_{50}} \cdot IB , \qquad (5)$$
(Pr.2)

wobei

$l_{50}$ = obere Grenze des Intervalls, in welchem 50 % überschritten werden,

$\Delta 50$= Differenz zwischen der in diesem Intervall erreichten kumulierten Häufigkeit und N/2,

$f_{50}$ = Häufigkeit in diesem Intervall,

IB = Intervallbreite

In unserem Falle haben wir zu rechnen: [1)]

$$Z = 15,5 - \frac{9,5}{11} \; 4 = 12,05.$$

Viel verwendet werden auch die sogenannten CENTILE, d.h. Prozentgrenzen, unterhalb derer ein bestimmter Prozentsatz der Verteilung liegt. Der Median ist in diesem Sinne eigentlich ein 50%-Centil (Schreibweise: $C_{50}$). Besonders häufig bedient man sich der Quartile, d.h. der Centile $C_{25}$, $C_{50}$ und $C_{75}$ sowie der Zehner-Centile $C_{10}$, $C_{20}$ usw.
Das arithmetische Mittel ist relativ empfindlich gegenüber häufiger vorkommenden Extremwerten. Der Median teilt diese Schwäche nicht, so daß er unter Umständen zuverlässiger die zentrale Tendenz einer Verteilung wiedergibt.
Der Median ist jener Wert, von welchem alle übrigen in der Weise abweichen, daß die Summe der absoluten Beträge dieser Abweichungen minimal ist. Dagegen ergibt beim arithmetischen Mittel die Summe der quadrierten Abweichungen ein Minimum. Im Unterschied zum Median geht in das arithmetische Mittel j e d e r einzelne Meßwert ein.
Ein weiterer und in gewisser Hinsicht der einfachste Mittelwert ist der MODAL- oder GIPFELWERT: Es ist dies jener Wert, der am häufigsten vorkommt bzw. jenes Intervall, das mit der größten Häufigkeit besetzt ist. Im letzteren Falle wird als Modalwert die entsprechende Intervallmitte benannt. Vorausgesetzt, daß wir eine Tabellierung vornehmen, ist er leicht ohne irgendwelche mathematischen Hilfsmittel erkennbar. Haben benachbarte Werte bzw. Intervalle gleichhohe Häufigkeiten, handelt es sich um eine breitgipfelige Verteilung. Bei zwei Gipfeln sprechen wir von einer bimodalen, bei mehreren von einer multimodalen Verteilung.

### 1.1.2. Variabilitätsmaße

Die Mittelwerte geben einen Wert, der die übrigen Werte der Verteilung möglichst gut repräsentieren soll. Man sagt, sie stellen die zentrale Tendenz einer Verteilung dar. Von Interesse ist aber in den meisten Fällen auch, in welchen Entfernungen die übrigen Werte um den Mittelwert herum liegen, d.h. wie sehr sie um ihn "streuen". Verteilungen können durchaus gleiche Mittelwerte haben, obwohl sie ganz unterschiedlich streuen. Um diesen Effekt zu erfassen, sind die Streuungs- oder Variabilitätsmaße entwickelt worden.

1) Die Intervallbreite erhalten wir, wenn wir die Distanz zwischen der Obergrenze eines Intervalls und der Untergrenze des folgenden der scheinbaren Intervallbreite zuschlagen. In diesem Fall: der Abstand zwischen 11 und 12 beträgt 1. Die scheinbare Intervallbreite ist 15 - 12 = 3. Die wirkliche Intervallbreite ist dann 3 + 1 = 4. Entsprechend liegen auch die wirklichen Intervallgrenzen jeweils in der Mitte zwischen den scheinbaren.

Das zur Zeit wohl am häufigsten benutzte Maß für die Variabilität ist die STANDARDABWEICHUNG SD (= "STANDARD DEVIATION"), oft auch schlicht "STREUUNG" genannt, die nach der Beziehung

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}{N}} \qquad (6)$$

(Pr. 1)

berechnet wird, falls Daten einer Gesamtpopulation zugrundeliegen. Öfter freilich werden wir von Daten einer Stichprobe ausgehen müssen. In diesem Falle ist die Standardabweichung nach der Formel

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}{N - 1}} \qquad (7)$$

(Pr. 1)

zu ermitteln. Beide Formeln lassen sich vorteilhaft anwenden, falls wir $\overline{X}$ bereits kennen. Möchten wir hingegen die Standardabweichung direkt aus ungeordneten Rohdaten ermitteln, rechnen wir nach den beiden folgenden Beziehungen:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2}{N}}{N}} \quad \text{für Populationsdaten,} \qquad (8)$$

(Pr. 1)

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2}{N}}{N - 1}} \quad \text{für Stichprobendaten.} \qquad (9)$$

(Pr. 1)

Für tabellierte Daten gelten die nachstehenden Formeln:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{c} f}}{\sum_{i=1}^{c} f_i}} \quad \text{für Populationsdaten,} \qquad (10)$$

(Pr. 1)

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{c} f}}{\sum_{i=1}^{c} f_i - 1}} \quad \text{für Stichprobendaten.} \qquad (11)$$

(Pr. 1)

Dabei ist

IM = Mitte des Intervalls,

f = Häufigkeit in dem jeweiligen Intervall.

Handelt es sich bei der untersuchten Verteilung um eine Normalverteilung, so liegen im Bereich einer Standardabweichung um das arithmetische Mittel herum (zwischen $\bar{X}$ + SD und $\bar{X}$ - SD) 68,26% aller Werte, im Bereich zweier Standardabweichungen um das arithmetische Mittel herum 95,44%. Man kann auch umgekehrt sagen, daß bei einer Standardabweichung die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Wert um mehr als eine Standardabweichung vom arithmetischen Mittel abweicht 31,74%, daß er um mehr als zwei Standardabweichungen abweicht 4,56% beträgt. Für jede beliebige eingipfelige Verteilung, soweit sie nur symmetrisch ist, gilt:

$$p_{\%} < 100 \cdot \frac{4}{9\,k^2}\,; \qquad (12)$$

$p_{\%}$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert um mehr als k Standardabweichungen von $\bar{X}$ abweicht.

k = Anzahl der Standardabweichungen, die X von $\bar{X}$ abweichen soll.

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Wert einer solchen Verteilung um mehr als k Standardabweichungen vom arithmetischen Mittel abweicht, beträgt weniger als p%.

Für eine beliebige (also auch mehrgipfelige und asymmetrische) Verteilung gilt:

$$p_{\%} < 100 \cdot \frac{1}{k^2}\,; \qquad (13)$$

$p_{\%}$ = Wahrscheinlichkeit, daß ein Meßwert um mehr als k Standardabweichungen von $\bar{X}$ abweicht.

k = Anzahl der Standardabweichungen, die X von $\bar{X}$ abweichen soll.

Ein sehr verbreitetes Streuungsmaß ist auch die VARIANZ. Sie ist nichts anderes als das Quadrat der Standardabweichung. Dementsprechend gelten für Fälle, in denen $\bar{X}$ bekannt ist, die Beziehungen:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{c}(X_i - \bar{X})^2}{N} \qquad \text{für Populationsdaten,} \qquad (14)\ (\text{Pr. } 1)$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{c}(X_i - \bar{X})^2}{N - 1} \qquad \text{für Stichprobendaten.} \qquad (15)\ (\text{Pr. } 1)$$

Ist $\bar{X}$ nicht bekannt und soll aus ungeordneten Urdaten gerechnet werden, gilt:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{N}}{N}$$ für Populationsdaten, (16) (Pr.1)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} x_i)^2}{N}}{N - 1}$$ für Stichprobendaten. (17) (Pr.1)

Aus tabellierten Daten rechnet man nach den Beziehungen:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i)^2}{\sum_{i=1}^{c} f_i}}{\sum_{i=1}^{c} f_i}$$ für Populationsdaten, (18) (Pr.1)

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{c} IM_i^2 \cdot f_i - \frac{(\sum_{i=1}^{c} IM_i \cdot f_i)^2}{\sum_{i=1}^{c} f_i}}{\sum_{i=1}^{c} f_i - 1}$$ für Stichprobendaten. (19) (Pr.1)

Ein Variabilitätsmaß, welches keine Meßwerte im strengen Sinne voraussetzt, ist der MITTLERE QUARTILABSTAND QD (="QUARTER DEVIATION"), der nach der Beziehung:

$$QD = \frac{C_{75} - C_{25}}{2} \qquad (20)$$

berechnet wird. $C_{75}$ und $C_{25}$ können dabei nach Programm 2 ermittelt werden.

Die Größe von SD hängt von der Größe des arithmetischen Mittels ab, so daß entsprechende Werte aus verschiedenen Verteilungen nicht ohne weiteres vergleichbar sind. Man relativiert deshalb SD am arithmetischen Mittel und erhält den VARIABILITÄTSKOEFFIZIENTEN:

$$VK = 100 \cdot \frac{SD}{\bar{\bar{X}}} \quad . \qquad (21)$$

### 1.1.3. Schiefe und Exzeß

Eine Verteilung ist schließlich weiterhin dadurch gekennzeichnet, daß sie flacher oder steiler und mehr oder weniger symmetrisch verläuft. Als diesbezügliche Maße verwendet die Statistik SCHIEFE und EXZESS.
Die Schiefe kann aufgrund folgender Beziehungen geschätzt werden:

$$Sch = \frac{\bar{X} - Mo}{SD}; \qquad \text{dabei ist } Mo = \text{Modalwert}, \quad SD = \text{Standardabweichung} \tag{22}$$

oder

$$Sch = \frac{C_{90} + C_{10}}{2} - C_{50}. \tag{23}$$

Symmetrische Verteilungen haben eine Schiefe von Null, rechts-asymmetrische eine negative, links-asymmetrische eine positive Schiefe.

Der Exzeß kann nach der folgenden Formel geschätzt werden:

$$E = \frac{C_{75} - C_{25}}{2\,(C_{90} - C_{10})}. \tag{24}$$

Der Exzeß einer Normalverteilung nach (24) ist 0.263. Verteilungen mit einem größeren Exzeß heißen breitgipfelig, solche mit einem kleineren schmalgipfelig. Zur Berechnung der notwendigen Ausgangswerte sind die entsprechenden Programme heranzuziehen.

Eine präzise Bestimmung der Schiefe erhalten wir nach der Gleichung:

$$Sch = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i^3}{N}; \qquad \text{darin ist } z = \frac{X - \bar{X}}{SD}. \tag{25}$$

(Pr. 3)

Entsprechend kann der Exzeß einer Verteilung nach der Formel

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i^4}{N} \tag{26}$$

(Pr. 3)

genau berechnet werden. Der Exzeß einer Normalverteilung ist nach (26) 3.000.

DA BEI DER INTERPRETATION DES EXZESSES AUF DIE NORMALVERTEILUNG BEZUG GENOMMEN WIRD, SOLLTE DIESES MASS NUR FÜR EINGIPFELIGE VERTEILUNGEN BERECHNET WERDEN.

## 1.2. Vergleich von Verteilungen

### 1.2.1. Vergleich empirischer Verteilungen

Nicht selten stehen wir vor dem Problem, Daten derselben Person in verschiedenen Verteilungen vergleichen zu müssen, etwa die Leistungen in mehreren psychologischen Tests oder Zensuren in mehreren Klassenarbeiten. Die Punktzahlen oder die Noten für sich genommen, besagen für einen Vergleich gar nichts, was besonders hinsichtlich der Schulnoten noch immer viel zu wenig gesehen wird.

#### 1.2.1.1. Prozentränge

Eine Möglichkeit, die gewünschte Vergleichbarkeit herzustellen, besteht in der Berechnung sogenannter Prozentränge:

$$PR = \frac{f_c}{N} \cdot 100, \qquad (27)$$

(Pr.4)

wobei $f_c$ = kumulierte Häufigkeit bis zu dem entsprechenden X-Wert,

$N$ = Gesamthäufigkeit.

Ein Prozentrang von 38.5% für einen Schüler in einer Klassenarbeit besagt, daß 38.4% seiner Mitschüler schlechter und 61.4% besser waren als er. Diese Angabe ist aussagekräftiger als die Feststellung, der Schüler habe in besagter Klassenarbeit eine 3 erhalten, zumal sie sich anstelle der Noten auf die erreichten Punktzahlen oder auf die Fehlerzahlen beziehen und insofern genauer differenzieren kann.

#### 1.2.1.2. Standardwerte

Ein anderes Verfahren besteht darin, die Verteilungen mit Hilfe ihrer Parameter $\bar{X}$ und SD zu standardisieren, d.h. die jeweiligen X-Werte nach der Beziehung

$$z = \frac{X - \bar{X}}{SD} \qquad (28)$$

(Pr.5/6)

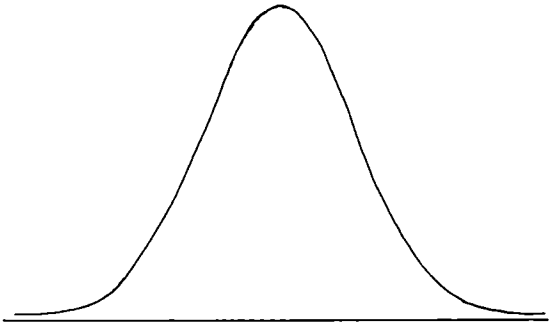
in z-Werte zu transformieren.
Prozentränge und Standardwerte sind nun über verschiedene Verteilungen hinweg vergleichbar. Wissen wir von einer Versuchsperson, daß sie in einem Gedächtnistest unter ihren Altersgenossen einen Prozentrang von 42.9% und in einem Aufmerksamkeitstest einen Prozentrang von 64.0% erreicht hat, dürfen wir folgern, daß sie im Aufmerksamkeitstest - und zwar ungeachtet der Schwierigkeit beider Tests - besser abgeschnitten hat. Dieselbe Folgerung dürften wir ziehen, wenn sie im ersten Test einen z-Wert von -1.26 und im zweiten Test

einen solchen von 0.54 erreicht hätte.
DA DIE BERECHNUNG VON STANDARDWERTEN UNTER HERANZIEHUNG DES ARITHMETISCHEN MITTELS UND DER STANDARDABWEICHUNG GESCHIEHT, SETZT SIE MESSWERTE IM STRENGEN SINNE VORAUS. ERSCHEINT DIESE VORAUSSETZUNG BEI EINER DER ZU VERGLEICHENDEN VERTEILUNGEN NICHT GESICHERT, EMPFIEHLT ES SICH, AUF DIE BERECHNUNG VON PROZENTWERTEN AUSZUWEICHEN.
In manchen Fällen ist es wichtig, zu überprüfen, ob zwischen zwei oder mehr empirischen Verteilungen generell ein signifikanter Unterschied besteht. Entsprechende Verfahren werden wir in den Kapiteln über Hypothesenprüfung und Varianzanalyse kennenlernen.

## 1.2.2. Vergleich einer empirischen Verteilung mit einer theoretischen Verteilung

### 1.2.2.1. Ausgewählte Zufallsverteilungen

Die NORMALVERTEILUNG dürfte jene Verteilungsform sein, welche in der Statistik die größte Rolle spielt. Man erhält sie z.B. in etwa, wenn man von einer schiefen Ebene sehr viele Kugeln herabrollen läßt und die Entfernungen mißt, in denen sie liegen bleiben. Ihr Bild kennen wir alle aus der Schulzeit:



Form einer Normalverteilung

Bei vielen Phänomenen des täglichen Lebens wie Körpergewicht, Körperlänge, Handkraft usw. liegt ziemlich klar auf der Hand, daß sie normalverteilt sind, bei anderen wird Normalverteiltheit unterstellt, z.B. bei der Intelligenz, der Unterscheidungsfähigkeit der Sinnesorgane usw.

Berechnet wird der Funktionswert zu einem vorgegebenen X-Wert nach der ziemlich komplizierten Formel:

$$f(x) = \frac{1}{SD\sqrt{2\pi SD^2}} \cdot e^{\left(-\frac{(X-\bar{X})^2}{2\,SD^2}\right)} \quad ; \qquad (29)$$

$\pi$ = die Kreiszahl 3,141592...,
e = die Basis der natürlichen Logarithman 2,718281...

Wir werden mit dieser Formel praktisch kaum arbeiten und sie schon gar nicht integrieren müssen. Man pflegt die Normalverteilung zu standardisieren, d.h. man verwendet eine Standardnormalverteilung mit $\bar{X} = 0$ und SD = 1. Für diese enthält Tabelle 1 zu allen z-Werten die zugehörigen Ordinaten und Flächenstücke, so daß wir sie dort ohne weiteres nachschlagen können.
DIE NORMALVERTEILUNG IST EINE KONTINUIERLICHE VERTEILUNG, D.H. DIE MESSWERTE SOLLEN JEDE BELIEBIGE GRÖSSE VON MINUS UNENDLICH BIS PLUS UNENDLICH ANNEHMEN KÖNNEN UND KEINE "SPRÜNGE" AUFWEISEN. DIE NORMALVERTEILUNG DARF NICHT ZUGRUNDEGELEGT WERDEN, WENN SICH MESSWERTE NUR INNERHALB FESTER GRENZEN BEWEGEN KÖNNEN.
Damit sie sinnvoll auf unseren Kugelversuch anwendbar ist, müßte man also die Zahl der Kugeln gegen Unendlich gehen lassen. Sie ist z.B. nicht anzuwenden auf Prozentwerte, die nur zwischen 0 und 100 oder gar auf Korrelationskoeffizienten, die nur zwischen +1.00 und -1.00 schwanken können, oder auf die Anzahl richtig beantworteter Fragen in einem Test, da deren Gesamtzahl grundsätzlich immer begrenzt sein muß und die Meßwerte (hier: die Punktezahlen) nicht kontinuierlich sind: Auf eine Testleistung von 23 Punkten folgt beispielsweise eine solche von 24 Punkten. Die Normalverteilung würde aber voraussetzen, daß man auch jedes beliebige Ergebnis zwischen 23 und 24 Punkten, also z.B. 23,2;23,4589 usw., erhalten kann.
Im allgemeinen verfährt man in der Statistik mit diesen Voraussetzungen recht großzügig. Im Hinblick auf den Meßbereich, der natürlich in keinem praktischen Fall von minus Unendlich bis plus Unendlich gehen kann, ist diese Toleranz sicherlich z.T. angebracht. Sie ist aber jedenfalls fehl am Platz, wo es sich um Verteilungen mit diskreten (nicht kontinuierlichen) Meßwerten handelt.
Eine Zufallsverteilung mit beschränktem Meßbereich für diskrete Werte ist die BINOMIALVERTEILUNG.

Für sie gilt die Beziehung:

$$p(x) = \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot q^{N-k}, \qquad (30)$$
(Pr. 7)

wobei
p(x) = Wahrscheinlichkeit, daß der Wert X k mal auftritt,
k = Häufigkeit, mit welcher ein Wert X auftreten soll,
p = Wahrscheinlichkeit für das Auftreten jedes der X-Werte, q = 1 - p,

N = Gesamtzahl der X-Werte,

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!\,(N-k)!} \quad 1)$$

Für N > 20 erzielt man in der Praxis im allgemeinen bereits recht brauchbare Ergebnisse mit der Normalverteilung.
Es sei z.B. die Wahrscheinlichkeit gesucht, mit 6 Griffen in einen undurchsichtigen Beutel, der eine rote, eine grüne, eine blaue und eine gelbe Kugel enthält, zweimal die rote Kugel herauszugreifen (wobei nach jedem Versuch die herausgegriffene Kugel wieder zurückgelegt wird):
Es ist dann N = 6, k = 2, p = 0.25, q = 0.75 und wir haben zu rechnen:

$$p\,(x) = \binom{6}{2}\,0.25^2 \cdot 0.75^{6-2} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^4 = 0.2966.$$

Eine Zufallsverteilung mit beschränktem Wertebreich für diskrete Werte ist auch die POISSONVERTEILUNG für seltene Ereignisse. Für sie wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nach der folgenden Formel berechnet:

$$p\,(x) = \frac{\bar{f}_x^{\,k}}{e^{(\bar{f}_x)} \cdot k!}\,; \qquad (31)$$

(Pr. 8)

wobei
p(x) = Wahrscheinlichkeit, daß das seltene Ereignis X k-mal auftritt,
k = Häufigkeit, mit welcher das seltene Ereignis X auftreten soll,
$\bar{f}_x$ = durchschnittliche Häufigkeit, mit welcher das seltene Ereignis unter N Fällen auftritt,
e = Basis der natürlichen Logarithmen 2,718281...

Ein seltenes Ereignis sei z.B. ein Schuß aus 100 m Entfernung ins Zentrum einer Zielscheibe. Anläßlich eines Schützenfestes seien unter 2450 abgegebenen Schüssen 319 ins Zentrum gesetzt worden. Wie groß war unter diesen Umständen für einen Teilnehmer die Wahrscheinlichkeit, 5mal ins Zentrum zu treffen?

In diesem Beispiel ist $\bar{f}_x = \frac{319}{2450}$ und k = 5. Wir haben zu rechnen:

$$p\,(x) = \frac{\left(\frac{319}{2450}\right)^5}{2{,}718281^{\left(\frac{319}{2450}\right)} \cdot 5!} = 0{,}0000002738.$$

1) ! ist das Fakultätszeichen: 8! besagt z.B., daß ein Produkt aus einer Faktorenkette gebildet werden soll, die - in absteigender Ordnung - mit 8 beginnen und mit 1 enden soll, so daß 8! = 8·7·6·5·4·3·2·1 = 40320

### 1.2.2.2. Die Chi-Quadrat-Probe

Oft wird man aufgrund irgendwelcher Hypothesen eine bestimmte Verteilung des Untersuchungsmaterials erwarten. So z.B., wenn wir untersuchen möchten, ob die Unfallhäufigkeit an bestimmten Wochentagen höher ist als an den übrigen. Die Nullhypothese, mit welcher unterstellt wird, die Abweichungen der beobachteten Häufigkeiten von den erwarteten seien zufallsbedingt, könnte hier etwa lauten: "An allen Wochentagen ereignen sich gleich viele Unfälle." Die erwartete Verteilung wäre also eine Gleichverteilung.

| | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_e$ | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 70 |
| $f_b$ | 13 | 6 | 5 | 5 | 10 | 14 | 17 | 70 |

($f_e$ = erwartete Häufigkeit, $f_b$ = beobachtete Häufigkeit)

Wir berechnen nun einen Prüfwert Chi-Quadrat nach der Formel

$$Chi^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{(f_{b_i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}} \qquad \text{darin ist } f_b = \text{beobachtete Häufigkeit}, \quad f_e = \text{erwartete Häufigkeit}. \tag{32}$$

Wir haben also zu jeder Spalte die Differenz zwischen $f_b$ und $f_e$ zu errechnen, ins Quadrat zu erheben und das Ergebnis durch $f_e$ zu teilen. Die so erhaltenen Werte sind über alle Spalten hinweg zum Chi-Quadrat aufzuaddieren.
Für unser Beispiel erhalten wir einen Wert von 14,00. Um diesen zu beurteilen, müssen wir noch die sogenannten Freiheitsgrade ( = df, von "degrees of freedom") feststellen. Wir hatten zwei Verteilungen von je 7 Werten für die Wochentage verglichen . Davon waren aber nur jeweils 6 Werte "frei": Der 7.Wert ergab sich aus den 6 übrigen und der Gesamtsumme, in welcher beide Verteilungen übereinstimmen mußten. Wir haben also 6 Freiheitsgrade. Wir schlagen nun in Tabelle 2 unter 6 Freiheitsgraden nach. Dort finden wir für die Signifikanz-Niveaus 0.05, 0.01 und 0.001 sogen. kritsche Chi-Quadrate von 12.59, 16.81 und 22.46. Unser Wert von 14.00 ist kleiner als 16.81, aber größer als 12.59. Wir sagen, er ist auf dem 5%-Niveau signifikant. Auf dem 1%-Niveau und erst recht auf dem 0.1%-Niveau wäre er hingegen nicht signifikant . Konkret bedeutet dies, daß die Nullhypothese ("An allen Wochentagen ereignen sich gleich viele Unfälle.") nur 5% Wahrscheinlichkeit für und 95% Wahrscheinlichkeit gegen sich hat. Die Alternativ-Hypothese ("Es ereignen sich nicht an allen Wochentagen gleich viele Unfälle.") kann also, wenn uns 95% Wahrscheinlichkeit genügen, akzeptiert werden.
Gelegentlich ist es wünschenswert, die genaue Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes $Chi^2$ zu kennen. Dazu kann man sich einiger z-Transformationen bedienen, mit deren Hilfe $Chi^2$ in einen z-Wert umgerechnet wird, dessen Wahrscheinlichkeit dann in der Tabelle 1 nachgeschlagen werden kann.

Ist df = 1, so gilt

$$|z| = \sqrt{Chi^2}. \tag{33}$$

Hat das $Chi^2$ zwischen 2 und 25 Freiheitsgraden, kann für z ein Näherungswert nach der Gleichung

$$z = \frac{\sqrt[3]{\frac{Chi^2}{df}} - \left(1 - \frac{2}{9 \cdot df}\right)}{\frac{2}{9 \cdot df}} \tag{34}$$

bestimmt werden.
Ist df größer als 25, gilt näherungsweise

$$z = \sqrt{2Chi^2} - \sqrt{2df - 1}. \tag{35}$$

ES IST ZU BEACHTEN, DASS DIE ERSTE DIESER DREI FORMELN AUF ABSOLUTWERTE DER STANDARDNORMALVERTEILUNG BEZOGEN IST, DIE ANDEREN ABER MIT VORZEICHEN VERSEHENE WERTE ERBRINGEN.
Für den Umgang mit Tabelle 1 hat das zur Folge, daß wir bei z-Werten, die wir mit Hilfe der ersten der drei Formeln erhalten, die zugehörige Fläche von 0.5 abziehen und v e r d o p p e l n müssen, um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten.
Für z-Werte aus den beiden anderen Formeln ist die Differenz zwischen der zugehörigen Fläche und 0.5 unmittelbar die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

BEI ALLEN CHI-QUADRAT-VERFAHREN IST ZU BEACHTEN, DASS DIESE VERFAHREN NUR SOGENANNTE ZWEISEITIGE ALTERNATIVHYPOTHESEN ZULASSEN, D.H. SIE PRÜFEN LEDIGLICH, OB EINE ABWEICHUNG IN IRGENDEINER RICHTUNG GEGEBEN IST.
Unsere Alternativhypothese war zweiseitig. Eine entsprechende einseitige Alternativhypothese hätte z.B. lauten können: "An Werktagen ereignen sich mehr Unfälle."
Die errechneten erwarteten Häufigkeiten hängen von unseren theoretischen Annahmen ab. In unserem Beispiel hätten wir andere erwartete Häufigkeiten erhalten, wenn wir die Hypothese aufgestellt hätten: An Werktagen ereignen sich doppelt so viele Unfälle wie an Samstagen und Sonntagen. In diesem Falle würde unsere Tabelle so ausgesehen haben:

| | Mo | Di | Mi | Do | Fr | Sa | So | Summe |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_e$ | 11.67 | 11.67 | 11.67 | 11.67 | 11.67 | 5.83 | 5.83 | 70.01 |
| $f_b$ | 13 | 6 | 5 | 5 | 10 | 14 | 17 | 70.00 |

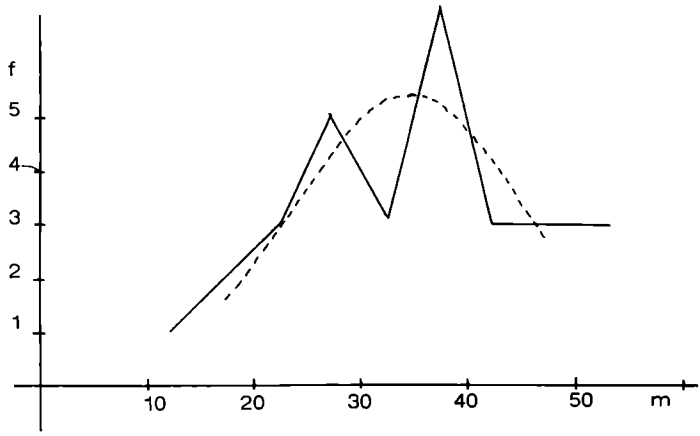
Die Alternativhypothese hätte gelautet: An Werktagen ereignen sich nicht doppelt so viele Unfälle wie an Samstagen und Sonntagen. Die Berechnung ergibt hier ein $Chi^2$ von 43.62 bei wiederum df = 6, welches auf dem 0.1%-Niveau signifikant ist. Die Alternativhypothese kann also mit der hohen Wahrscheinlichkeit von 99.9% als richtig akzeptiert werden.
BEI ALLEN CHI-QUADRAT-VERFAHREN IST DARAUF ZU ACHTEN, DASS DIE ERWARTETE HÄUFIGKEIT IN KEINEM FALLE UNTER 5 ABSINKT.
Mit unseren errechneten Werten für Samstag und Sonntag liegen wir gerade noch über dieser Schwelle. Liegen einzelne Werte unter 5, so muß man entweder Werte zusammenfassen (in unserem Beispiel etwa die Häufigkeiten für Samstag und Sonntag), wodurch sich auch die Zahl der Freiheitsgrade entsprechend verringert, oder man muß die Stichprobe, welche der beobachteten Verteilung zugrundeliegt, vergrößern.
Ein Vergleich einer empirischen Verteilung mit einer theoretischen Verteilung liegt auch vor, wenn wir etwa wissen wollen, ob wir eine vorgefundene Verteilung als Normalverteilung betrachten dürfen.
Wir nehmen an, bei einem Schulsportfest seien die nachstehenden Wurfweiten mit der angegebenen Häufigkeit erzielt worden:

| Weiten in m | beobachtete Häufigkeit | erwartete Häufigkeit |
|---|---|---|
| 10 - 14.99 | 1 | 1.08 |
| 15 - 19.99 | 2 | 1.60 |
| 20 - 24.99 | 3 | 2.98 |
| 25 - 29.99 | 5 | 4.33 |
| 30 - 34.99 | 3 | 5.35 |
| 35 - 39.99 | 7 | 5.28 |
| 40 - 44.99 | 3 | 4.16 |
| 45 - 49.99 | 3 | 2.78 |
| 50 - 54.99 | 3 | 2.42 |

Zur sog. Normalitätsprüfung müssen die Intervallgrenzen in z-Werte überführt, d.h. standardisiert werden. Nach Tabelle 1 ermitteln wir dann jeweils diejenigen Flächenanteile, welche zwischen den Intervallgrenzen liegen und multiplizieren sie mit der Gesamtzahl aller Werte, um die erwarteten Häufigkeiten zu erhalten. Es ist

$$f_e = N\left(F_{IG_{oben}} - F_{IG_{unten}}\right); \quad \text{wobei IG = Intervallgrenzen (für die unterste Grenze ist } -\infty\text{, für die oberste } +\infty \text{ einzusetzen).} \qquad (36)$$

Im übrigen können die errechneten Häufigkeiten auch zur graphischen Darstellung einer Normalverteilungskurve, die einer vorgegebenen empirischen Verteilung entspricht, benutzt werden. Allerdings dürfen die errechneten Häufigkeiten für das erste und letzte Intervall nicht herangezogen werden, da die Grenzen dieser Intervalle ja gegen Unendlich gehen sollen. In unserem Beispiel ergibt sich folgendes Bild:




Der Test auf Übereinstimmung der beiden Verteilungen erfolgt dann wieder über die Chi-Quadrat-Probe. Programm 9 erlaubt eine rationelle Abwickelung des Verfahrens.
Im Falle unseres Beispiels ergeben sich die oben in Spalte 3 der Tabelle aufgeführten erwarteten Häufigkeiten, und es errechnet sich ein $Chi^2$ von 2.28. Der kritische Wert bei einem Signifikanz-Niveau von 5% beträgt bei df = 6 (Anzahl der Zeilen minus 3, da beide Verteilungen N, X und SD gemeinsam haben müssen!) 12.59. Wir liegen mit unserem Ergebnis weit darunter, d.h. die Verteilung unserer Wurfweiten weicht nicht signifikant von einer Normalverteilung ab.
Ganz analog können empirische Verteilungen auch auf die Übereinstimmung mit einer Binomial- und mit einer Poissonverteilung geprüft werden.
IN ALLEN FÄLLEN DES VERGLEICHS EINER EMPIRISCHEN VERTEILUNG MIT EINER THEORETISCHEN (ERWARTETEN) VERTEILUNG SOLLTE DARAUF GEACHTET WERDEN, DASS SICH DER VERGLEICH NICHT AUF ZU WENIGE INTERVALLE STÜTZT.

# 2. Prüfung von Unterschieden

Ein wichtiger Teil der in der Statistik gebräuchlichen Verfahren dient der Überprüfung von Hypothesen. Man kann zunächst Zusammenhangs- und Unterschiedshypothesen unterscheiden. Den Bereich der ersteren klammern wir in diesem Kapitel aus. Wir werden uns im Kapitel 3 im Rahmen der Korrelationsstatistik eingehend damit befassen.
Für das Beibehalten oder Verwerfen einer Hypothese können wir mittels der hier geschilderten Verfahren allemal nur eine mehr oder weniger große Wahrscheinlichkeit geltend machen, die dafür spricht, daß eine Hypothese stimmt oder falsch ist. Ein strenger Beweis oder eine strenge Widerlegung einer aufgestellten Hypothese ist mit statistischen Methoden grundsätzlich nicht möglich.

## 2.1. Fehlertheorie

### 2.1.1. Alpha- und Beta-Fehler

Bei der empirischen Prüfung von Hypothesen können uns zwei Arten von Fehlern unterlaufen:
- Wir verwerfen eine an sich richtige Null-Hypothese zugunsten einer Alternativhypothese (Alpha-Fehler bzw. Fehler erster Art).
- Wir verwerfen eine an sich richtige Alternativ-Hypothese zugunsten der Nullhypothese (Beta-Fehler bzw. Fehler zweiter Art).

Die üblichen statistischen Prüfverfahren schützen im allgemeinen besser vor Alpha- als vor Beta-Fehlern. Je höher wir das Signifikanz-Niveau für die Prüfung einer Null-Hypothese ansetzen, d.h. je mehr Wahrscheinlichkeit wir für die Alternativ-Hypothese fordern, desto größer wird die Gefahr, daß wir einen Beta-Fehler begehen.
Oft können wir diesem Dilemma durch einige pragmatische Überlegungen entgehen:
- Wenn die Null-Hypothese eine in der Fachwelt allgemein anerkannte Theorie enthält, wenn wir subjektiv in hohem Maße davon überzeugt sind, daß sie zutrifft, wenn ihr Verwerfen ernste Folgen (z.B. finanzieller Art) hat, setzen wir das Signifikanz-Niveau streng an, d.h. wir fordern Signifikanz auf dem 1%- oder sogar auf dem 0.1%-Niveau.
- Wenn die Null-Hypothese eine in der Fachwelt bis dahin allgemein bestrittene Auffassung widerspiegelt, wenn wir subjektiv erhebliche Zweifel an ihr haben, wenn ihre Beibehaltung ernste Folgen hat, setzen wir das Signifikanz-Niveau milde an, d.h. wir verwerfen die Null-Hypothese z.B. schon auf dem 10%- oder auf dem 25%-Niveau.
- Sind wir über die Prioritäten unsicher und können wir mögliche Folgen nicht abschätzen, testen wir auf einem mäßigen Signifikanz-Niveau, etwa auf dem 5%-Niveau.

AUS DIESEN ÜBERLEGUNGEN SOLLTE DEUTLICH GEWORDEN SEIN, DASS DAS STRENGSTE SIGNIFIKANZ-NIVEAU NICHT AUTOMATISCH AUCH UNSERE ENTSCHEIDUNGEN BEZÜGLICH DER HYPOTHESE AM BESTEN ABSICHERT.

### 2.1.2. Standardfehler

Jeder statistische Wert gilt nur innerhalb bestimmter Zuverlässigkeitsgrenzen, die man kennen muß, um ihn angemessen zu beurteilen. Damit entsprechende Aussagen gemacht werden können, bedarf es meistens der Berechnung des sog. Standardfehlers. Die folgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Standardfehler der wichtigsten statistischen Maße und Kennwerte:

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{X}$ | $s = \frac{SD}{\sqrt{N}}$; | (37) |
| SD | $s = \frac{SD}{\sqrt{2N}}$; | (38) |
| Median | $s = 1.25 \cdot \frac{SD}{\sqrt{N}}$; | (39) |
| QD | $s = 1.65 \cdot \frac{SD}{\sqrt{2N}}$; | (40) |
| p % | $s = \sqrt{\frac{p\%\,(100-p\%)}{N}}$; | (41)[1] |
| r | $s = \frac{1-r^2}{\sqrt{N-2}}$; | (42) |
| $Z_r$ | $s = \frac{1}{\sqrt{N-3}}$; | (43)[2] |
| $Z_{\bar{r}}$ | $s = \frac{1}{\sqrt{\sum(N-3)+3}}$; | (44)[3] |
| $X_1-X_2$ | $s = \sqrt{\frac{SD_1^2}{N_1} + \frac{SD_2^2}{N_1}}$. | (45) |

### 2.1.3. Vertrauensbereiche

Mit Hilfe des Standardfehlers können sog. Vertrauensbereiche ermittelt werden, innerhalb deren ein bestimmter Wert mit einer gewünschten Wahrscheinlichkeit wirklich liegt.

1) p% ist ein beliebiger Prozentwert einer Verteilung, etwa ein Prozentrang.
2) $Z_r$ ist der Fishersche Z-Wert einer Korrelation.
3) $Z_{\bar{r}}$ ist der Fishersche Z-Wert einer mittleren Korrelation r. Unter (N-3) wird die Anzahl der Wertepaare, auf denen die Korrelationen beruhen - jeweils vermindert um 3 -, summiert.

Ist K irgendein statistischer Kennwert und p das gewünschte Signifikanzniveau (d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Null-Hypothese), so gilt:

$$VB = K \pm z_{p/2} \cdot s; \text{ bzw. } VB = K \pm t_{p/2} \cdot s. \qquad (46)$$

(Dabei ist $z_{p/2}$ bzw. $t_{p/2}$ der z- bzw. der t-Wert für eine Wahrscheinlichkeit von p/2.)
Bei der Überprüfung eines Vertrauensbereichs handelt es sich immer um eine 2-seitige Fragestellung. Deshalb ist als $z_{p/2}$ bzw. als $t_{p/2}$ jener Wert einzusetzen, dessen Fläche, von 0.5 abgezogen, die Hälfte des gewünschten Signifikanzniveaus ergibt (also 0.025, 0.005 usw.). Für das 5%-Niveau ist das ein z-Wert von 1.96, für das 1%-Niveau ein solcher von 2.58, für das 0.1%-Niveau einer von 3.29.
Zweiseitig ist unsere Fragestellung insofern, als wir wissen wollen, in welchem Bereich um den ermittelten Wert herum (also darunter und darüber) der wirkliche Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt.
Die Ermittlung der z-Werte kann im übrigen mit Hilfe von Tabelle 1 für jedes beliebige Signifikanz-Niveau vorgenommen werden.
Angenommen, wir hätten ermittelt, daß von 480 untersuchten Säuglingen 31.28% an leichteren oder schwereren Luxationen des Hüftgelenks leiden. Wir möchten nun wissen, welcher größere oder auch kleinere Prozentsatz (zweiseitige Fragestellung!) in Wirklichkeit mit diesem Leiden behaftet sein könnte, wenn wir ein Signifikanz-Niveau von 8% zugrundelegen: Wir suchen zunächst in Tabelle 1 nach demjenigen z-Wert, dessen zugehörige Fläche um 0.04 kleiner als 0.5 ist, also etwa 0.46 beträgt. Dies ist der z-Wert 1.70. Nun rechnen wir:

nach (41) ist $s = 2.12$; $VB = 31.28 \pm 1.70 \cdot 2.12 = 31.28 \pm 3.604$.
$27.676 \leq p\% \leq 34.884$.

Oft wird uns der so ermittelte Vertrauensbereich zu weit sein. Es gibt zwei Wege, ihn zu verkleinern: Entweder mäßigen wir das Signifikanz-Niveau oder wir vergrößern die Stichprobe, auf der unser empirischer Wert beruht.
Für die Unsicherheit einer Summe oder Differenz statistischer Werte, die wir aus verschiedenem Untersuchungsmaterial gewonnen haben, gilt die Beziehung:

$$s_1 \pm s_2 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}, \qquad (47)$$

d.h. wir haben die beiden den Einzelwerten zugehörigen Standardfehler zu quadrieren, die Quadrate zu addieren und aus der Summe die Wurzel zu ziehen.
Angenommen wir möchten wissen, ob sich zwei Korrelationen $r_1 = +.36$ und $r_2 = +.58$, die wir aus Stichproben von $N_1 = 187$ und $N_2 = 243$ gewonnen haben, signifikant unterscheiden. Wir errechnen zunächst die Standardfehler:

$$s_1 = \frac{1 - 0.36^2}{\sqrt{187 - 2}} = .0640 \qquad s_2 = \frac{1 - 0.58^2}{\sqrt{243 - 2}} = .0427.$$

Der Standardfehler der Differenz ist dann .0769. Für das 1%-Niveau haben wir diesen Standardfehler mit 2.58 zu multiplizieren und erhalten .1984. Die Differenz der beiden Korrelationskoeffizienten beträgt aber .2200, d.h. sie ist größer als die errechnete Unsicherheit und damit auf dem 1%-Niveau signifikant.

Für die Unterschiede von Prozentangaben errechnen wir einen kritischen Bruch nach der Beziehung

$$CR = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1(100 - p_1)}{N_1} + \frac{p_2(100 - p_2)}{N_2}}} \qquad (48) \quad (Pr.10)$$

und sehen in Tabelle 1 nach, ob der errechnete z-Wert die kritischen Werte von 1.96 oder 2.58 oder gar 3.29 erreicht oder unterschreitet.

## 2.2. Prüfverfahren

Die folgenden Prüfverfahren sind eingeteilt in solche für Intervall-Daten, Ordinal-Daten und Nominal-Daten. Zum Verständnis müssen einleitend einige Worte über verschiedene Skalen-Niveaus vorausgeschickt werden:
Daten haben dann INTERVALLSKALENNIVEAU, wenn sie die realen Verhältnisse isomorph abbilden, wenn also z.B. gleichen Differenzen zwischen zwei Daten auch gleiche Differenzen zwischen den beiden Objekten entsprechen. Diese Daten meinten wir bisher immer, wenn wir von Meßdaten im engeren Sinne sprachen. Das Bilden von Mittelwerten, das Errechnen von Varianzen und Standardabweichungen ist nur bei intervallskalierten Daten sinnvoll.
Oft können wir keine Aussagen über die wirkliche Größe von beobachteten Objekten oder Phänomenen, wohl aber solche über ihr Verhältnis zueinander machen: Wir können die Objekte oder Phänomene in eine Rangordnung bringen, d.h. das größte, das zweitgrößte, das kleinste angeben, ohne daß damit schon auch gesagt wäre, daß der Unterschied zwischen dem größten und zweitgrößten gleich dem Unterschied zwischen dem zweitgrößten und drittgrößten ist. Solche Daten haben ORDINALSKALENNIVEAU.
In manchen Fällen können wir Objekte schließlich lediglich bestimmten Klassen zuordnen, so z.B. eine Gruppe von Menschen der europiden, negroiden, mongoliden und australiden Rasse oder den männlichen und weiblichen Menschen. Wir können dann innerhalb dieser Klassen lediglich die Häufigkeiten ermitteln, mit der sie besetzt sind. Solche Daten haben NOMINALSKALENNIVEAU bzw. KATEGORIALSKALENNIVEAU. Die Klassen der Kategorien müssen so definiert sein, daß sie einander ausschließen und jeder Fall zweifelsfrei zugeordnet werden kann.
Es ist zulässig, Daten eines höheren Skalenniveaus (wir haben sie hier in absteigender Reihenfolge vorgestellt) in solche eines niedrigeren zu transformieren, also auch Verfahren, die für niedrigere Skalenniveaus gedacht sind, für höhere einzusetzen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß in diesem Falle Informationen nicht ausgeschöpft werden und wir somit möglicherweise zu weniger signifikanten Ergebnissen kommen.

## 2.2.1. Prüfverfahren für intervallskalierte Daten

### 2.2.1.1. Der t-Test für unabhängige Stichproben

Für den Vergleich arithmetischer Mittel aus verschiedenen Verteilungen hinsichtlich der Signifikanz ihres Unterschieds ist der sog. t-Test für unabhängige Stichproben ein häufig angewendetes Verfahren. Es wird ein kritischer Bruch nach der Beziehung

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{SD_1^2}{N_1} + \frac{SD_2^2}{N_2}}} \quad \text{mit } N_1 + N_2 - 2 \text{ Freiheitsgraden} \qquad (49)$$

(Pr. 11)

errechnet. Die Signifikanz dieses Werts können wir in Tabelle 3 nachsehen. Für große Stichproben (etwa $N > 500$) dürfen wir ihn auch als z-Wert betrachten und anhand von Tabelle 1 auf seine Signifikanz prüfen (d.h. wir sehen seine Fläche nach und stellen die Differenz zu 0.5 fest, welche dann die halbe Wahrscheinlichkeit ist).
Der t-Test darf jedoch nur unter zwei Voraussetzungen angewendet werden: das Datenmaterial soll normalverteilt (was evtl. durch eine Normalitätsprüfung festgestellt werden kann, falls es zweifelhaft ist) und die Varianzen (Quadrate der Standardabweichungen) müssen in gewissen Grenzen homogen sein.
Für die zweite Bedingung wendet man den sog. F-Test an und rechnet:

$$F = \frac{\text{größere Varianz}}{\text{kleinere Varianz}}. \qquad (50)$$

Anhand der Tabelle 4 prüfen wir nach, ob die kritischen Werte für das 5%- bzw. 1%-Niveau erreicht werden. Als Freiheitsgrade gelten $df_1 = N_1 - 1$ und $df_2 = N_2 - 1$. Wird ein kritischer Wert von F erreicht, so dürfen wir auf dem betreffenden Signifikanzniveau folgern, daß die beiden zu den Mittelwerten gehörigen Verteilungen nicht der gleichen Grundgesamtheit angehören.
Es ist dann nicht statthaft, den t-Test durchzuführen, aber es bedarf seiner auch nicht mehr: Der fragliche Unterschied ist bereits durch den F-Test nachgewiesen.
Wir zeigen das Verfahren an einem Beispiel auf:
Nehmen wir an, vergleichende Messungen der Körperlänge bei 2 verschiedenen Bevölkerungsgruppen hätten folgende Werte erbracht:

| | Gruppe 1 | Gruppe 2 |
|---|---|---|
| $\bar{X}$ | 168.23 cm | 172.49 cm |
| $SD_x$ | 14.66 cm | 12.96 cm |
| N | 60 | 120 |

Es ist dann

$$F = \frac{14.66^2}{12.96^2} = 1.28.$$

Den kritischen Wert dazu haben wir unter 60 - 1 = 59 und 120 - 1 = 119 Freiheitsgraden nachzusehen. Unsere F-Tabelle weist freilich nur einen solchen für 60 und 120 Freiheitsgrade aus, der auf dem 5%-Niveau 1.43 beträgt. Unser Ergebnis liegt so deutlich darunter, daß wir die These, beide Gruppen würden nicht derselben Grundgesamtheit angehören, noch nicht einmal auf dem 5%-Niveau halten können. Da es ferner plausibel ist, daß Körperlängen normalverteilt sind, dürfen wir somit den t-Test durchführen:

$$t = \frac{172.49 - 168.23}{\sqrt{\frac{14.66^2}{60} + \frac{12.96^2}{120}}} = 1.909 .$$

Bei 60 + 120 - 2 = 178 Freiheitsgraden erreicht dieser Wert, wie Tabelle 5 ausweist, noch nicht einmal den kritischen Wert für das 5%-Niveau. Die These, die unterschiedlichen Durchschnittswerte für die Körpergröße in den beiden Gruppen seien nur zufällig, konnte also nicht widerlegt werden. Der Mittelwertunterschied ist nicht signifikant.

### 2.2.1.2. Der t-Test für abhängige Stichproben

Die Bedingung des t-Tests für unabhängige Stichproben, daß die verglichenen Mittelwerte aus verschiedenen Stichproben stammen müssen, die keine Versuchspersonen gemeinsam haben dürfen, kann gerade dann hinderlich sein, wenn wir in ein und derselben Stichprobe wiederholte Erhebungen durchgeführt haben und wissen wollen, ob beobachtete Veränderungen des Mittelwertes, etwa nach einer zwischendurch ergriffenen Maßnahme, signifikant sind.
In diesem Falle wenden wir den t-Test für abhängige Stichproben an. Nach diesem Verfahren ist auch dann vorzugehen, wenn wir zwei Stichproben vergleichen, deren Versuchspersonen jeweils paarweise einander zugeordnet werden müssen (z.B. Zwillinge, Ehepaare, Klassenkameraden usw.). Solche Stichproben heißen parallelisierte Stichproben.
Wir müssen in diesem Falle die paarweisen Differenzen $X_d$ bilden und sowohl diese als auch ihre Quadrate aufsummieren. Der Wert für t errechnet sich dann nach folgendem kritischen Bruch:

$$t = \frac{\sqrt{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_{d_i}}{\sqrt{N \sum_{i=1}^{N} x_{d_i}^2 - (\sum_{i=1}^{N} x_{d_i})^2}}; \qquad df = N - 1. \qquad (53)$$

(Pr. 12)

Wir vergleichen als Beispiel die Reaktionszeiten von 9 Versuchspersonen vor und nach Einnahme eines angeblich anregenden Medikaments:

| Versuchsperson | Zeit vor Einnahme | Zeit nach Einnahme | $x_d$ | $x_d^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.4 sec. | 2.1 sec. | 0.3 | 0.09 |
| 2 | 1.9 sec. | 1.6 sec. | 0.3 | 0.09 |
| 3 | 3.1 sec. | 2.0 sec. | 1.1 | 1.21 |
| 4 | 2.8 sec. | 2.8 sec. | 0 | 0 |
| 5 | 2.6 sec. | 2.0 sec. | 0.6 | 0.36 |
| 6 | 2.9 sec. | 1.6 sec. | 1.3 | 1.69 |
| 7 | 3.2 sec. | 2.8 sec. | 0.4 | 0.16 |
| 8 | 2.1 sec. | 2.3 sec. | -0.2 | 0.04 |
| 9 | 2.5 sec. | 2.0 sec. | 0.5 | 0.25 |
| | | | 4.3 | 3.89 |

Wir errechnen einen Wert von t = 2.992, der bei 8 Freiheitsgraden auf dem 5%-Niveau signifikant ist (kritischer Wert: 2.306). Das Medikament hat also tatsächlich die Reaktionszeiten signifikant verkürzt.
DER t-TEST IN BEIDEN VARIANTEN ARBEITET MIT MITTELWERTEN UND VARIANZEN. DAS HAT ZUR FOLGE, DASS ER NUR IN FÄLLEN ANWENDBAR IST, IN DENEN MESSWERTE IM ENGEREN SINNE VERGLICHEN WERDEN.

### 2.2.1.3. Vergleich einer Stichprobenvarianz mit einer Populationsvarianz

Manchmal sind wir interessiert, uns zu vergewissern, ob eine Stichprobe, ungeachtet vorgefundener Unterschiede, zu einer bestimmten Grundgesamtheit (Population) gehört. Wir errechnen dazu nach folgender Gleichung ein Chi-Quadrat:

$$CHi^2 = \frac{(N-1)\,V_{St}}{V_{GG}}; \qquad (54)$$

$V_{St}$ = Varianz der Stichprobe,
$V_{GG}$ = Varianz der Grundgesamtheit,
N = Umfang der Stichprobe,
df = N - 1.

Bei diesem Test ist darauf zu achten, daß er voraussetzt, die Grundgesamtheit, mit welcher verglichen wird, sei normalverteilt. Wo diese Bedingung nicht erfüllt oder nicht wenigstens als wahrscheinlich gegeben unterstellt werden kann, sollte das Verfahren nicht angewendet werden, und zwar um so weniger, je kleiner die Stichprobe ist.

### 2.2.1.4. Vergleich zweier Stichprobenvarianzen

Der Vergleich zweier Stichprobenvarianzen durch die Bestimmung

$$F = \frac{V_1}{V_2}; \qquad (55)$$

$V_1$ = Varianz der ersten Stichprobe,
$V_2$ = Varianz der zweiten Stichprobe,
$N_1$ = Umfang der ersten Stichprobe,
$N_2$ = Umfang der zweiten Stichprobe,
$df_1$ = $N_1 - 1$ = Zählerfreiheitsgrade,
$df_2$ = $N_2 - 1$ = Nennerfreiheitsgrade,

hat uns bereits im Abschnitt 2.2.1.1. (t-Test für unabhängige Stichproben) beschäftigt. In den Zähler ist dabei die jeweils größere der beiden Varianzen zu setzen. Für den Wert von F sehen wir in Tabelle 4 die kritischen Werte nach.

### 2.2.2. Prüfverfahren für ordinalskalierte Daten

Können wir nicht sicher sein, daß die uns vorliegenden Daten intervallskaliert sind, ordnen wir ihnen Rangplätze zu und wenden ein Verfahren für ordinalskalierte Daten an, wie auch immer dann, wenn uns ohnehin nur Rangordnungen bekannt sind.

#### 2.2.2.1. Der U-Test von Mann-Withney

Der U-Test gestattet den Vergleich zweier Stichproben im Hinblick auf die Ausprägung eines Merkmals. Für kleinere Verteilungen (wobei allerdings die kleinere Stichprobe nicht weniger als 3 und die größere nicht weniger als 9 Elemente umfassen sollte) errechnen wir eine Prüfgröße U:

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - T_1, \quad \text{wobei } n_1 = \text{Umfang der kleineren Stichprobe}, \quad n_2 = \text{Umfang der größeren Stichprobe}, \quad T_1 = \text{Rangsumme der kleineren Stichprobe}. \tag{56}$$

Für den U-Test müssen jeweils alle Werte über beide Verteilungen hinweg in eine durchgehende Rangfolge gebracht werden. Sind die Stichproben gleich groß, ist es gleichgültig, von welcher man ausgeht.
Ist $n_1$ mindestens gleich 3 und $n_2$ größer als 10, können wir mit dem folgenden kritischen Bruch einen z-Wert errechnen:

$$z = \frac{n_1 \cdot (n_1 + n_2 + 1) - 2T_1}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}{3}}}. \tag{57}$$

(Pr. 13)

Während wir den z-Wert nach Tabelle 1 überprüfen, schlagen wir die kritischen Werte von U in Tabelle 5 nach.
Ein Beispiel mag die Anwendung erklären: Es soll geprüft werden, ob sich zwei Gruppen von Beamten hinsichtlich der auf Dienstreisen zurückgelegten Strecken unterscheiden:

| Gruppe 1 | | Gruppe 2 | |
|---|---|---|---|
| km | Rang | km | Rang |
| 345 | 8 | 5 017 | 16 |
| 1 320 | 14 | 983 | 13 |
| 598 | 10 | 128 | 4 |
| 4 813 | 15 | 97 | 3 |
| 211 | 5 | 322 | 6 |
| 45 | 1 | 648 | 12 |
| | | 335 | 7 |
| $n_1 = 6$ | $T_1 = 53$ | 439 | 9 |
| | | 81 | 2 |
| | | 601 | 11 |
| | | $n_2 = 10$ | |

$$U = 6 \cdot 10 + \frac{6 \cdot (6+1)}{2} - 53 = 28.$$

Bei einem zweiseitigen Test (Null-Hypothese: Die beiden Gruppen unterscheiden sich hinsichtlich des genannten Merkmals nicht in irgendeiner Weise) dürfen wir auf dem 10%-Signifikanz-Niveau nach Tabelle 5 einen kritischen Wert von 14 nicht überschreiten. Es läßt sich also kein signifikanter Unterschied nachweisen.

Müssen wir sogenannte verbundene Ränge bilden, so ändert dies an der Berechnung von U nichts. Verbundene Ränge liegen vor, wenn z.B. an 2. Stelle 4 Personen mit gleichen Werten liegen. Wir ordnen diesen zunächst die entsprechenden Ränge zu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Versuchsperson | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Rang | 2 | 3 | 4 | 5 |

Da die Versuchspersonen jedoch alle 4 denselben Wert erzielt haben, wäre eine solche Rangverteilung willkürlich und ungerecht. Wir weisen daher einer jeden denselben, genau in der Mitte zwischen dem 2. und 5. liegenden Rangplatz, also 3,5, zu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Versuchsperson | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Rang | 3,5 | 3,5 | 3,5 | 3,5. |

Die Versuchsperson mit dem nächsthöheren Rang erhält nun den Rangplatz 6 usw. Soweit $n_1$ oder $n_2$ größer als 10 ist, haben wir einen z-Wert nach der folgenden korrigierten Formel zu errechnen:

$$z = \frac{n_1 (n_1 + n_2 + 1) - 2 T_1}{\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{3n(n-1)} \left[ n^3 - n - \sum_i (R_{gl}^3 - R_{gl}) \right]}}, \quad \text{wobei } n = n_1 + n_2. \qquad (58)$$

(Pr. 14)

Dabei ist $R_{gl}$ = die Anzahl der Versuchspersonen, welche jeweils denselben Rang gemeinsam haben.

Die aufwendigste Arbeit, die Zuordnung der Rangplätze, müssen wir "per Hand und Augenschein" vornehmen, so daß dieser Test mit wachsenden Stichprobenumfängen rasch sehr unhandlich wird.

### 2.2.2.2. Der H-Test bzw. die Rangvarianzanalyse nach Kruscal & Wallis

Eben diesen Mangel hat der H-Test mit dem U-Test gemeinsam. Allerdings erlaubt uns dieses Verfahren, mehr als 2 Gruppen miteinander zu vergleichen. Wiederum erhalten alle Werte über alle Gruppen hinweg Rangplätze (notfalls verbundene) zugewiesen. Daraus errechnen wir dann eine Prüfstatistik für H nach der folgenden Beziehung:

$$H = \frac{12}{N\,(N+1)} \cdot \sum_{i=1}^{c} \frac{(\sum_{i=1}^{n} R_i)^2}{n} - 3 \cdot (N + 1) . \qquad (59)$$

Darin ist $\sum R$ = Summe der Rangplätze in jeder Gruppe,
$n$ = Größe der einzelnen Gruppen.

Für 3 Gruppen, die alle $\leq 5$ sind, entnehmen wir Tabelle 6 die kritischen Werte, welche H nicht überschreiten darf, falls die Null-Hypothese verworfen werden soll. Für mehr und größere Gruppen ist H annähernd chi-quadrat-verteilt, bei c Gruppen mit c - 1 Freiheitsgraden.

### 2.2.2.3. Die Rangvarianzanalyse von Friedman

Ein rationelleres Verfahren, das wir anwenden können, wenn es sich um abhängige und gleichgroße Stichproben handelt, ist die Rangvarianzanalyse von Friedman. Wir werden uns seiner bedienen, wenn wir eine Stichprobe wiederholten Untersuchungen unterziehen oder wenn die Versuchspersonen durchwegs einander zuordbar sind (Zwillinge, Ehepaare, Vater - Mutter - ältestes Kind - mittleres Kind - jüngstes Kind usw.). Die Formel für den Friedman-Test lautet:

$$Fr = \frac{12}{n \cdot c\,(c+1)} \cdot \sum_{i=1}^{c} (\sum_{i=1}^{n} R_i)^2 - 3\,n \cdot (c + 1) . \qquad (60)$$

Darin ist $n$ = gemeinsame Größe jeder der Gruppen bzw. Größe der wiederholt untersuchten Gruppe,
$c$ = Anzahl der Gruppen bzw. der wiederholten Untersuchungen,
$\sum R$ = Rangsumme einer Gruppe bzw. der Gruppe in einer Untersuchung.

Für 3 Gruppen bis zu 9 Personen enthält Tabelle 7 die Zufallswahrscheinlichkeiten. Falls $c = 3$ und $n > 9$ oder $c > 3$ und $n > 4$, ist Fr annähernd chi-quadrat-verteilt mit c - 1 Freiheitsgraden.
Wählen wir als Beispiel die Gewichtsveränderungen in einer 8 Personen umfassenden Versuchsgruppe durch 3 verschiedene Ernährungspläne, die jeweils nach 3 Monaten hervorgerufen wurden:

| Vp | vor den Versuchen | | nach d. 1. Vers. | | nach d. 2. Vers. | | nach d. 3. Vers. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | kg | Rang | kg | Rang | kg | Rang | kg | Rang |
| 1 | 65 | 2 | 66 | 1 | 62 | 3 | 60 | 4 |
| 2 | 61 | 2 | 63 | 1 | 60 | 3 | 59 | 4 |
| 3 | 70 | 3 | 71 | 2 | 72 | 1 | 68 | 4 |
| 4 | 72 | 1 | 71 | 2 | 70 | 3 | 69 | 4 |
| 5 | 59 | 2 | 58 | 3 | 60 | 1 | 57 | 4 |
| 6 | 75 | 2 | 76 | 1 | 71 | 4 | 73 | 3 |
| 7 | 58 | 2 | 60 | 1 | 57 | 3 | 55 | 4 |
| 8 | 55 | 3 | 59 | 1 | 56 | 2 | 50 | 4 |
| | | 17 | | 12 | | 20 | | 31 |

$$Fr = \frac{12}{8 \cdot 4 \cdot (4+1)} \cdot \sum (17^2 + 12^2 + 20^2 + 31^2) - 3 \cdot 8 \cdot (4 + 1) = 104{,}55.$$

Bei df = 4 - 1 = 3 erhalten wir nach Tabelle 2 für das 0.1%-Niveau einen kritischen Wert für $Chi^2$ von 16.27. Die durch die verschiedenartige Ernährung hervorgerufenen Gewichtsunterschiede sind also außerordentlich signifikant.
Durch eine Umgruppierung der obigen Tabelle können wir auch die Unterschiede zwischen den 8 Versuchspersonen testen:

Versuchspersonen

| | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | kg | R | kg | R | kg | R | kg | R | kg | R | kg | R | kg | R | kg | R |
| vor d. Vers. | 65 | 4 | 61 | 5 | 70 | 3 | 72 | 2 | 59 | 6 | 75 | 1 | 58 | 7 | 55 | 8 |
| nach 1. Vers. | 66 | 4 | 63 | 5 | 71 | 2.5 | 71 | 2.5 | 58 | 8 | 76 | 1 | 60 | 6 | 59 | 7 |
| nach 2. Vers. | 62 | 4 | 60 | 5.5 | 72 | 1 | 73 | 3 | 60 | 5.5 | 71 | 2 | 57 | 7 | 56 | 8 |
| nach 3. Vers. | 60 | 4 | 59 | 5 | 68 | 3 | 69 | 2 | 57 | 6 | 73 | 1 | 55 | 7 | 50 | 8 |
| | | 16 | | 20.5 | | 9.5 | | 9.5 | | 25.5 | | 5 | | 27 | | 31 |

$$Fr = \frac{12}{4\ 8\ (8+1)} \sum (16^2 + 20.5^2 + 9.5^2 + 9.5^2 + 25.5^2 + 5^2 + 27^2 + 31^2)$$

$$- 3\ 4(8+1) = 120{,}75.$$

Bei df = 8 - 1 = 7 erhalten wir nach Tabelle 2 auf dem 0.1%-Niveau einen kritischen Wert für $Chi^2$ von 24.322. Unser Wert für Fr liegt weit darüber, auch die Versuchspersonen unterscheiden sich also äußerst signifikant.

### 2.2.2.4. Der Wilcoxen-Test

Ebenfalls Unterschiede in 2 Parallelstichproben oder bei Testwiederholungen prüft der Wilcoxen-Test. Hier werden jeweils die Paardifferenzen ermittelt und nach ihrem absoluten Betrage mit Rangplätzen versehen. Nachträglich erhalten dann

die Rangplätze wieder das Vorzeichen der Differenz. Es werden nun einfach alle "negativen" Ränge und alle "positiven" Ränge zu je einer Summe aufaddiert. Die kleinere Rangsumme dient dann als Prüfstatistik $T_w$:

$$T_w = \sum_{i=1}^{n} R_{i\,min}. \tag{61}$$

In Tabelle 8 können wir die kritischen Werte nachschlagen, die nicht überschritten werden dürfen, wenn die Null-Hypothese aufrechterhalten werden soll. Für Stichproben, welche größer als 25 sind, errechnen wir einen z-Wert nach dem kritischen Bruch:

$$CR = \frac{T_w - \frac{n\,(n+1)}{4}}{\sqrt{\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{24}}}. \tag{62}$$

(Pr. 15)

Seine Signifikanz können wir anhand von Tabelle 1 überprüfen.

### 2.2.2.5. Der Vorzeichen-Test

Ein sehr einfach zu handhabender Test für 2 Parallelstichproben ist der Vorzeichentest, der lediglich die Vorzeichen der Paardifferenzen benutzt. Wertepaare, die nicht differieren, werden ausgeschieden und nicht mitgezählt. Da der Vorzeichentest nur ein Minimum an Information ausnutzt, fallen Entscheidungen nach ihm sehr konservativ aus, d.h. die Nullhypothese wird u.U. auch dann noch beibehalten, wenn sie bei der Verwendung feinerer Verfahren verworfen werden müßte. ABER MAN KANN SICHER SEIN, DASS EINE NACH DEM VORZEICHENTEST VERWORFENE NULLHYPOTHESE MIT FEINEREN VERFAHREN ERST RECHT NICHT ZU HALTEN WÄRE.
Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von F Pluszeichen (oder Minuszeichen)[1] unter N Vorzeichen errechnet sich entsprechend der Binominalverteilung nach der Beziehung:

$$p = \binom{N}{F} \cdot 0.5^N; \qquad \text{dabei ist} \binom{N}{F} = \frac{N!}{F!\,(N-F)!}. \tag{63}$$

(Pr. 16)

Für N>25 errechnen wir einen z-Wert nach dem kritischen Bruch

$$CR = \frac{2F - N}{\sqrt{N}}. \tag{64}$$

1) Ob man die Zahl der Plus- oder die der Minuszeichen zugrundelegt, ist für das Ergebnis gleichgültig.

### 2.2.2.6. Der Median-Test

Im Mediantest beurteilen wir den Unterschied zwischen zwei Gruppen aufgrund einer Vierfelder-Tafel. Dazu ermitteln wir zunächst für beide Gruppen den gemeinsamen Median und legen dann eine Vierfelder-Tafel nach folgendem Schema an:

| | Gruppe 1 | Gruppe 2 | |
|---|---|---|---|
| Werte $\leq$ Z | a | b | a + b |
| Werte $>$ Z | c | d | c + d |
| | a + c | b + d | N |

Die Signifikanz wird dann nach der für Vierfelder-Tafeln gebräuchlichen Formel überprüft:

$$Chi^2 = \frac{N \cdot (ad - bc)^2}{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+d) \cdot (c+d)} \qquad \text{bei df = 1.} \qquad (65)$$

(Pr. 17)

VORAUSSETZUNG IST ALLERDINGS, DASS ES SICH UM UNABHÄNGIGE STICHPROBEN HANDELT.
Selbstverständlich können wir auch ein beliebiges anderes Centil anstelle des Medians wählen. Nehmen wir das arithmetische Mittel als Grenze, was auch zulässig ist, wird das Verfahren allerdings zu einem solchen für intervallskalierte Daten, da die Berechnung von $\overline{X}$ solche voraussetzt.
In jedem Falle muß man darauf achten, daß in den vier Feldern nicht mit erwarteten Häufigkeiten (die in der Berechnungsvorschrift nicht unmittelbar in Erscheinung treten) unter 10 gerechnet werden darf. Im Zweifelsfalle bestimmt man die kleinste erwartete Häufigkeit für das Feld mit der kleinsten Zeilen- und Spaltensumme nach der Beziehung:

$$fe_{min} = \frac{\sum Z_{min} \cdot \sum Sp_{min}}{N} ; \qquad (66)$$

dabei ist
$\sum Z_{min}$ = kleinste Zeilensumme,
$\sum Sp_{min}$ = kleinste Spaltensumme.

### 2.2.3. Prüfverfahren für nominalskalierte Daten

In manchen Fällen ist es noch nicht einmal möglich, Aussagen über Rangfolgen zu machen, sondern man kann Daten lediglich bestimmten Kategorien zuordnen, z.B. "Männer", "Nichtraucher", "Landwirte" usw. Hier können wir eine Reihe von Verfahren für Nominaldaten anwenden, deren VORAUSSETZUNG allerdings ist, DASS DIE ZUORDNUNG ZU DEN ENTSPRECHENDEN KATEGORIEN AUSNAHMSLOS VÖLLIG EINDEUTIG ERFOLGEN KANN UND DASS SICH DIE KATEGORIEN NICHT ÜBERSCHNEIDEN.

### 2.2.3.1. Die Vierfelder-Tafel

Haben wir 2 jeweils in alternative Merkmalsklassen unterteilbare Stichproben, können wir eine Vierfelder-Tafel erstellen. Es soll z.B. der Anteil der Geschlechter an der Belegschaft zweier Betriebe verglichen werden:

| | Betrieb A | Betrieb B | |
|---|---|---|---|
| Frauen | 583 (a) | 289 (b) | 872 |
| Männer | 2 031 (c) | 427 (d) | 2 458 |
| | 2 614 | 716 | 3 330 (N) |

Unter der Voraussetzung, daß die beiden Merkmale (Anteil der Männer/Frauen an der Belegschaft, Zugehörigkeit zu Betrieb A/B) stochastisch voneinander unabhängig sind, d.h. sich in ihrem alternativen Auftreten nicht gegenseitig beeinflussen, können wir als Prüfgröße ein $Chi^2$ nach der schon vorgestellten Formel für Vierfelder-Tafeln errechnen:

$$Chi^2 = \frac{N \cdot (ad - bc)^2}{(a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+d) \cdot (c+d)} \qquad \text{bei df} = 1. \qquad (65)$$

(Pr. 17)

In unserem Beispiel würden wir erhalten:

$$Chi^2 = \frac{3330 \cdot (2031 \cdot 289 - 583 \cdot 427)^2}{2614 \cdot 716 \cdot 872 \cdot 2458} = 93.24.$$

Bei df = 1 ergibt sich nach Tabelle 2 bei einem Signifikanz-Niveau von 0.1% ein kritischer Wert von 10.828. Da unser $Chi^2$ weit darüber liegt, sind die beobachteten Unterschiede zwischen den beiden Betrieben hinsichtlich des Anteils der Geschlechter an der Belegschaft außerordentlich signifikant.
Daß eine der 4 erwarteten Häufigkeiten in den Feldern kleiner als 10 sein könnte, ist im Hinblick auf die großen Zeilen- und Spaltensummen ausgeschlossen und braucht nicht eigens überprüft zu werden.
Wenden wir Formel 65 an, werden die erwarteten Häufigkeiten aus den beobachteten Häufigkeiten geschätzt.
Nun ist aber die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit, die wir mit der Anwendung von Formel (65) machen, in unserem Beispiel durchaus fragwürdig: Zwischen dem schwankenden Anteil der Geschlechter an der Belegschaft und der Betriebszugehörigkeit ist sehr wohl eine Abhängigkeit denkbar. Wäre Betrieb A eine Gießerei und Betrieb B eine Textilfabrik, würde das Ausmaß der männertypischen bzw. frauentypischen Arbeit die Verhältnisse beeinflussen. Man kann aber auch ganz allgemeine Überlegungen anstellen, welche eine geringere Quote an berufstätigen Frauen ergeben. So etwa könnte die Verpflichtung der Frau als Mutter ihre Möglichkeiten, einen Beruf auszuüben, zumindest zeitweise einschränken. Können wir die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit nicht machen, bleibt uns dennoch der Weg, die erwarteten Häufig-

keiten anderweitig zu schätzen. So mag z.B. einem Bericht des statistischen Landesamtes zu entnehmen sein, daß die Berufstätigkeitsquote der Frauen in der Region, in welcher beide Betriebe liegen, zu jener der Männer im Verhältnis 41:59 steht. Gehen wir davon aus, so erhalten wir folgende Erwartungswerte:

| | Betrieb A | Betrieb B |
|---|---|---|
| Frauen | 1071,74 (a) | 293,56 (b) |
| Männer | 1542,26 (c) | 422,44 (d) |
| | 2614 | 716 |

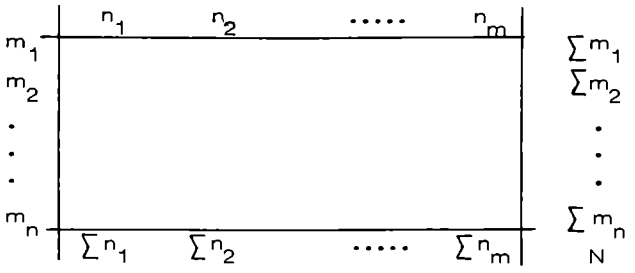
Wir ermitteln nun nach Formel 34 ein $Chi^2$, indem wir für jedes Feld die Differenz $f_b - f_e$ bilden, quadrieren und durch $f_e$ dividieren und schließlich die für alle 4 Zellen errechneten Werte addieren.
In unserem Beispiel ergibt sich:

$$Chi^2 = 222,88 + 0,07 + 596,64 + 0,05 = 819,64.$$

BEI DER SIGNIFIKANZPRÜFUNG EINER VIERFELDER-TAFEL, DEREN ERWARTUNGSWERTE NICHT STOCHASTISCH AUS DEN BEOBACHTETEN WERTEN GESCHÄTZT SIND, IST ZU BEACHTEN, DASS EIN SOLCHES $CHI^2$ 3 FREIHEITSGRADE HAT.
Für unser $Chi^2$ ermitteln wir nach Tabelle 2 bei 3 Freiheitsgraden auf dem 0,1%-Niveau einen kritischen Wert von 16,266. Der Unterschied zwischen den beiden Betrieben ist also auch dann hochsignifikant, wenn wir die Durchschnittsverhältnisse der Region zugrundelegen. Zugleich können wir hier sehen, obwohl der $Chi^2$-Test immer nur zweiseitige Fragestellungen prüft (hier: besteht ein Unterschied irgendeiner Art zwischen den Beschäftigungsquoten der Geschlechter in beiden Betrieben?), daß im Grunde beinahe der gesamte Wert von $Chi^2$ durch den Betrieb A (die Felder a und c) erbracht wird. Daraus läßt sich folgern: Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, daß Betrieb A überdurchschnittlich viele Männer beschäftigt, während die Beschäftigungsquoten im Betrieb B ziemlich genau den Durchschnittswerten entsprechen.

### 2.2.3.2 Die Kontingenztafel (Pr. 18)

Das Verfahren der Vierfelder-Tafel kann auf eine n-mal-m-Felder-Tafel, eine sogenannte Kontingenztafel, ausgedehnt werden. Wir vergleichen dann ein n-fach klassifizierbares Merkmal mit einem m-fach klassifizierbaren anderen, und es entsteht folgende Matrix:




Können die beiden Merkmale als stochastisch voneinander unabhängig gelten, so lassen die erwarteten Häufigkeiten sich nach der Beziehung

$$fe = \frac{\sum Z \cdot \sum Sp}{N}, \qquad \text{wobei: } \sum Z = \text{Zeilensumme}, \ \sum Sp = \text{Spaltensumme}, \tag{66}$$

aus den beobachteten Häufigkeiten schätzen. $Chi^2$ wird dann wie üblich nach der Beziehung

$$Chi = \sum_{i=1}^{c} \frac{(fb_i - fe_i)^2}{fe_i}$$

errechnet.
Programm 18 gestattet die rationelle Ermittlung des $Chi^2$ für eine Kontingenztafel.
Die Freiheitsgrade einer Kontingenztafel werden in folgender Weise berechnet:

$$df = (n - 1) \cdot (m - 1).$$

Wir demonstrieren die Berechnung an folgendem Beispiel:

| | ledig | verheiratet | geschieden | verwitwet | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| starke sexuelle Interessen | 53 | 49 | 42 | 11 | 155 |
| mäßige sexuelle Interessen | 28 | 67 | 31 | 56 | 182 |
| keine sexuellen Interessen | 17 | 22 | 18 | 39 | 96 |
| $\sum$ | 98 | 138 | 91 | 106 | 433 |

Es errechnet sich ein $Chi^2$ von 54,85. Bei df = (4 - 1)·( 3 - 1) = 6 ist dieser Wert hochsignifikant. Der kritische Wert für das 0,1%-Niveau beträgt 22,46.

### 2.2.3.3. Der McNemar-Test

Untersuchen wir dieselbe Stichprobe zweimal im Hinblick auf ein alternatives Merkmal, so können wir den McNemar-Test anwenden. Auch hierzu müssen wir eine Vierfelder-Tafel erstellen:

| | | 2. Untersuchung | |
|---|---|---|---|
| | | MA | MB |
| 1. Unter- | MA | a | b |
| suchung | MB | c | d |

MA = Merkmalsalternative A,
MB = Merkmalsalternative B.

Die Berechnungsvorschrift für $Chi^2$ lautet dann:

$$Chi^2 = \frac{(b - c)^2}{b + c}; \qquad df = 1. \tag{67}$$

Angenommen, eine Werbekampagne für das Waschmittel A soll auf ihre Auswirkung hin überprüft werden. Vor der Kampagne wuschen 84 Frauen von einer 500 Personen umfassenden Stichprobe mit A, die restlichen 416 mit anderen Waschmitteln. Nach der Kampagne wuschen 128 Frauen mit A und 372 mit anderen Mitteln, und zwar waren 81 A "treu" geblieben, 47 verwendeten erst jetzt A, 369 wuschen nach wie vor mit anderen Mitteln und 3 waren von A "abgefallen":

| | | nach der Kampagne | |
|---|---|---|---|
| | | A | andere Mittel |
| vor der | A | 81 | 3 |
| Kampagne | andere Mittel | 47 | 369 |

$$Chi^2 = \frac{(3 - 47)^2}{50} = 38,72$$

Da wir bei einem Freiheitsgrad auf dem 0,1%-Niveau einen kritischen Wert von 10,83 aus Tabelle 2 entnehmen können, darf die Kampagne als durchschlagender Erfolg angesehen werden, freilich nur in statistischer Hinsicht.
Auch beim McNemar-Test ist zu prüfen, ob die erwartete Häufigkeit für b oder c nicht etwa 10 unterschreitet. Dafür gilt die Beziehung:

$$f_e = \frac{b + c}{2}. \tag{68}$$

In unserem Falle errechnen wir $\frac{3 + 47}{2} = 25$. Damit ist die Bedingung für die Anwendung des Verfahrens erfüllt.

### 2.2.3.4. Der Cochran-Test

Soll eine Stichprobe nicht nur zweimal, sondern k-mal untersucht werden, so können wir den Cochran-Test zur Überprüfung auftretender Unterschiede einsetzen. Wir legen uns dazu eine Matrix nach folgendem Muster an, wobei das Auftreten der einen Merkmals-Alternative mit 1, das der anderen mit 0 bezeichnet wird:

| Versuchspersonen | Untersuchungen 1 | 2 | 3 | ... | k | Zeilensumme | Quadrat der Zeilensumme |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | ... | 0 | 34 | 1156 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | ... | 1 | 21 | 441 |
| . | . | . | . | ... | . | ... | ... |
| . | . | . | . | ... | . | ... | ... |
| . | . | . | . | ... | . | ... | ... |
| n | 0 | 0 | 1 | ... | 1 | 27 | 729 |
| Summe | $\sum U$12 | 9 | 18 | ... | 9 | $\sum Vp$586 | $\sum Vp^2$ 23459 |

Wir errechnen dann ein $Chi^2$ mit df = k - 1 Freiheitsgraden nach der Beziehung:

$$Chi^2 = \frac{(k-1)\cdot\left[k\sum_{i=1}^{n} U_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)^2\right]}{k\sum_{i=1}^{n} Vp_i - \sum_{i=1}^{n} Vp_i^2}. \qquad (69)$$

(Pr.19)

Dabei sollte das Produkt kn > 30 sein.

Nehmen wir an, eine Stichprobe von 8 Versuchspersonen sei über ein Jahr hinweg einer Therapie gegen Kopfschmerzen unterzogen worden. Die Versuchspersonen wurden vor der Untersuchung und dann jeweils in Vierteljahresabständen befragt, ob der letzte Tag vor der Befragung schmerzfrei gewesen sei (0) oder nicht (1):

| Versuchspersonen | vor der Unters. | 1. VJ | 2. VJ | 3. VJ | 4. VJ | Zs | $Zs^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 9 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 3 | 9 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 16 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 | 9 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 4 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 9 |
| 8 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | 16 |
| Summe | 8 | 6 | 4 | 4 | 4 | 24 | 76 |

Wir rechnen demgemäß:

$$Chi^2 = \frac{(5-1)\cdot\left[5\cdot(8^2+6^2+4^2+4^2+4^2) - (8+6+4+4+4)^2\right]}{5\cdot 24 - 76} = 5{,}818.$$

Dieser Wert ist bei df = 5 - 1 = 4 weitab von jeglicher Signifikanz: Für das 25%-Niveau beispielsweise wäre schon ein kritischer Wert von 5,385 erforderlich. Die Therapie hatte also keinen nachweislichen Erfolg.

### 2.2.3.5. Die Konfigurations-Frequenz-Analyse (Pr.20 bis 23)

Die Kontingenztafel verallgemeinert die Vierfelder-Tafel dahingehend, daß statt zweier Merkmale mit jeweils alternativer Ausprägung zwei Merkmale mit n und m Merkmalsstufen bzw. -klassen untersucht werden. Die Konfigurationsfrequenzanalyse (KFA) treibt diese Verallgemeinerung in der Richtung weiter, daß sie erlaubt, k Merkmale mit n und m Merkmalsstufen zu analysieren.
Wir wählen als erstes den Fall, daß Unterschiede in einer Stichprobe im Hinblick auf 3 jeweils alternativ ausgeprägte Merkmale untersucht werden:
In einer Untersuchung sei geprüft worden, ob im Hinblick auf das Geschlecht (Merkmal A : 1 = männlich, 0 = weiblich) und die Wohnregion (Merkmal B: 1 = Stadt, 0 = Land) Unterschiede in der Drogenabhängigkeit Jugendlicher (Merkmal C: 1 = Drogenabhängigkeit, 0 = keine Drogenabhängigkeit) bestehen.

| Merkmale A B C | beob. Häufigkeit $= f_b$ | erw. Häufigkeit $= f_e$ | Chi-Quadrat |
|---|---|---|---|
| 1 1 1 | 28 | 40,424 | 3,818 |
| 1 1 0 | 213 | 182,776 | 4,998 |
| 1 0 0 | 144 | 170,984 | 4,259 |
| 1 0 1 | 47 | 37,816 | 2,230 |
| 0 1 1 | 35 | 43,793 | 1,766 |
| 0 1 0 | 189 | 198,007 | 0,410 |
| 0 0 1 | 53 | 40,967 | 3,534 |
| 0 0 0 | 191 | 185,233 | 0,180 |
| | 900 | | |

Es wird also zunächst aufgeführt, wie oft jede Merkmalskonfiguration sich im Untersuchungsmaterial findet ($f_b$). Des weiteren zählen wir aus, wieviele männliche, drogenabhängige usw. Jugendliche in der Untersuchung enthalten sind. Wir addieren dazu einfach die Häufigkeiten aller Konfigurationen, für welche A = 1, A = 0, B = 1 usw., und erhalten:

$$\sum A_1 = 432 \qquad \sum A_0 = 468$$
$$\sum B_1 = 465 \qquad \sum B_0 = 435$$
$$\sum C_1 = 163 \qquad \sum C_0 = 737$$

Die erwarteten Häufigkeiten errechnen wir dann nach der Beziehung:

$$f_e = \frac{\sum_{i=1}^{c} A_{1(0)i} \cdot \sum_{i=1}^{c} B_{1(0)i} \cdot \sum_{i=1}^{c} C_{1(0)i}}{N^2}, \quad \text{wobei N=Gesamtzahl aller untersuchten Fälle.} \qquad (70) \quad (Pr.22)$$

Demgemäß haben wir beispielsweise für die Konfiguration 1 1 0 zu rechnen:

$$f_e = \frac{432 \cdot 465 \cdot 737}{900^2} = 182{,}776,$$

da $A_1 = 432$; $B_1 = 465$ und $C_0 = 737$ bei N = 900.

Die Werte für $Chi^2$ werden dann nach der schon mehrfach verwendeten Formel

$$Chi^2 = \sum_{i=1}^{c} \frac{(f_{b_i} - f_{e_i})^2}{f_{e_i}}$$

errechnet. Die Zahl der Freiheitsgrade für eine KFA mit k alternativ gestuften Merkmalen ist

$$df = 2^k - k - 1,$$

in unserem Beispiel also 4. Das errechnete (Gesamt-) $Chi^2$ von 21,194 ist auf dem 0,1%-Niveau signifikant. Der entsprechende kritische Wert beträgt 18,467.

Einer der Vorzüge einer KFA ist nun, daß sie uns ermöglicht, festzustellen, in welchen einzelnen Merkmalskonfigurationen der Unterschied zwischen den beobachteten und erwarteten Häufigkeiten signifikant ist. Insofern als eine Kontingenztabelle ohne weiteres auch als eine KFA mit 2 n- bzw. m-fach gestuften Merkmalen darstellbar ist, ist das Verfahren auch auf eine solche anwendbar. Die Zahl der Freiheitsgrade für diese sogenannten einzelnen $Chi^2$-Komponenten ist jeweils 1. Da aber die gesamte KFA nicht $8 \cdot 1 = 8$, sondern 4 Freiheitsgrade hat, muß der Signifikanzprüfung ein korrigiertes Signifikanz-Niveau $p^*$ zugrunde gelegt werden, das nach der Beziehung

$$p^* = \frac{p}{r} \qquad \text{(wobei } p = \text{gewünschtes Signifikanz-Niveau, z.B. 0,05.} \quad r = \text{Anzahl der Konfigurationen)} \qquad (71)$$

errechnet wird. Fordern wir für unser Beispiel Signifikanz auf dem 5%-Niveau, so erhalten wir

$$p^* = \frac{5}{8}\% = 0{,}625\%,$$

d.h. wir müssen die einzelnen $Chi^2$-Komponenten am kritischen Wert für das 0,625%-Niveau überprüfen, wenn wir sie auf dem 5%-Niveau testen wollen. Solche Signifikanz-Niveaus sind in den üblichen Tabellen meist nicht ausgewiesen. Man kann die kritischen Werte für $Chi^2$ in diesem Falle relativ einfach berechnen:

$$Chi^2 = \left[ z_{F\left(0{,}5 - \frac{p/2}{r}\right)} \right]^2 . \qquad (72)$$

Dabei ist p/2 = die Hälfte des gewünschten Signifikanz-Niveaus,
r = Anzahl der m ö g l i c h e n Konfigurationen,
F = Fläche des z-Wertes der Standnormalverteilung.

In unserem Fall rechnen wir: $\frac{p/2}{r} = 0{,}00625:2 = 0{,}003125$

$0{,}5 - 0{,}003125 = 0{,}496875.$

Wir suchen diesen Wert in Tabelle 1 unter den Flächen der Standardnormalverteilung auf. Am nächsten kommt ihm dort der Wert 0,4969. Diesem entspricht ein z-Wert von 2,74. Diesen quadrieren wir und erhalten als den gesuchten kritischen Wert für $Chi^2$ 7,51.

Es zeigt sich, daß keine einzelne Komponente signifikant ist.

ES ZEIGT SICH, DASS EINE KFA (ALSO AUCH EINE KONTINGENZTAFEL!) ALS GANZE SIGNIFIKANT SEIN KANN, OHNE DASS EINE DER MERKMALSAUSPRÄGUNGEN SIGNIFIKANT IST. UMGEKEHRT IST ES AUCH MÖGLICH, DASS EINZELKOMPONENTEN SIGNIFIKANT SIND, OHNE DASS DIE GANZE KFA SIGNIFIKANT IST. MAN SOLLTE SICH IN SOLCHEN FÄLLEN, UM FEHLINTERPRETATIONEN ZU VERMEIDEN, AUF JEDEN FALL DIE EINZELNEN KOMPONENTEN ANSEHEN.

Kann eine Komponente als signifikant abgesichert werden, ergibt sich die Frage, inwieweit sie auch praktisch bedeutsam ist. Dazu kann ein sog. Prägnanzkoeffizient nach der Formel

$$Q = \frac{2\left|f_b - f_e\right|}{N + \left|2f_e - N\right|} \tag{73}$$

berechnet werden, der bei geringster Prägnanz den Wert 0 und bei höchster Prägnanz den Wert 1 erreicht. Für die Merkmalskombination 1 1 0 in unserem Beispiel ergäbe sich

$$Q = \frac{2\left|213 - 282{,}776\right|}{900 + \left|2 \cdot 282{,}776 - 900\right|} = 0{,}113.$$

Die Prägnanz reicht kaum hin, auch wenn uns eine Signifikanz auf dem 25%-Niveau genügt.

Bei einer KFA mit k t-fach gestuften Merkmalen ist die Zahl der Freiheitsgrade

$$df = t^k - k - 1. \tag{74}$$

Handelt es sich ganz allgemein um k Merkmale mit a,b,c ...n Merkmalsstufen, so errechnet sich die Anzahl der Freiheitsgrade nach der Beziehung

$$df = a \cdot b \cdot c \ldots m \cdot n - a - b - c \ldots - m - n + (n - 1). \tag{75}$$

Die Errechnung des Gesamt-Chi$^2$ und die Überprüfung der Einzelkomponenten geschieht ganz analog zu einer KFA mit 2-fach gestuften Merkmalen.

Die erwarteten Häufigkeiten werden bei k verschiedenen Merkmalen ganz allgemein nach der Beziehung berechnet

$$f_e = \frac{\sum_{i=1}^{c} A_{1(0)_i} \cdot \sum_{i=1}^{c} B_{1(0)_i} \cdots \cdot \sum_{i=1}^{c} K_{1(0)_i}}{N^{k-1}}, \tag{76}$$

wobei $\sum_{i=1}^{c} A_{1(0)_i}$ = Anzahl der Fälle mit vorhandener (nicht vorhandener) Ausprägung des Merkmals A,

$\sum_{i=1}^{c} B_{1(0)_i}$ = Anzahl der Fälle mit vorhandener (nicht vorhandener) Ausprägung des Merkmals B.

usw.

(Bei nicht alternativ, sondern mehrfach gestuften Merkmalen wären die Häufigkeiten für $A_{0(1,2\ldots n)}$, d.h. für die Fälle mit dem Ausprägungsgrad 0,1,2,...n des Merkmals A einzusetzen.)

Konfigurationsfrequenzanalysen können schließlich auch mit einem Material aus mehreren Stichproben durchgeführt werden.

Es wird in der Praxis öfter vorkommen, daß wir nicht alle theoretisch denkbaren Merkmalskombinationen tatsächlich vorfinden. In solchen Fällen schieben wir einfach eine Leerzeile in die Matrix ein. Die $Chi^2$-Komponenten dieser Zeilen können dann nicht überprüft werden, ebenso kann kein Gesamt-$Chi^2$ für die KFA berechnet werden. Zur Berechnung des korrigierten Signifikanz-Niveaus nach (71) müssen jedoch a l l e , auch die unbesetzten Merkmalskombinationen herangezogen werden.
Auch Meßwiederholungen an derselben Stichprobe kann man mit einer KFA testen: Die Veränderung von der 1. zur 2. Messung, von der 2. Messung zur 3. Messung usw. nimmt man dann einfach als weitere a-, b- usw. -fach gestufte Merkmale in die Matrix auf.
GRUNDSÄTZLICH MUSS ABER BEI JEDER KFA GRÜNDLICH BEDACHT WERDEN, DASS DIE ZAHL DER KOMBINATIONEN MIT ZUNEHMENDER ZAHL DER MERKMALE UND DER MERKMALSSTUFEN EXPONENTIAL ANSTEIGT.

Im übrigen muß streng darauf geachtet werden, daß die Zahl der erwarteten Häufigkeiten in keinem Falle geringer als 5 und die Gesamtzahl N aller untersuchten Fälle für k t-fach gestufte Merkmale größer als 5 $t^k$ ist.

# 3. Prüfung von Zusammenhängen

Im vorangehenden Kapitel wurden Verfahren vorgestellt, mit denen Unterschieds-Hypothesen überprüft werden können. Oft wird man aber auch Hypothesen über vermutete Zusammenhänge untersuchen wollen. Dazu dient die sog. Korrelationsrechnung.
Bevor wir die verschiedenen Verfahren im einzelnen präsentieren, sei ausdrücklich festgestellt, daß MIT HILFE ERRECHNETER KORRELATIONEN KEIN NACHWEIS ÜBER DIE EXISTENZ VON KAUSALBEZIEHUNGEN GEFÜHRT WERDEN KANN. KORRELATIONEN SIND LEDIGLICH EIN MASS FÜR DAS ZUSAMMENVORKOMMEN ZWEIER VARIABLEN. Dieses aber kann von ganz verschiedenen Kostellationen herrühren:
- $V_1$ verursacht $V_2$,
- $V_2$ verursacht $V_1$,
- es herrscht ein Inklusionsverhältnis zwischen $V_1$ und $V_2$,
- $V_1$ und $V_2$ sind von einer oder mehreren anderen Variablen abhängig.

usw.

## 3.1. Die Produkt-Moment-Korrelation

Das verbreitetste Korrelationsmaß ist die Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson-Bravais. Verglichen werden hier immer Meßwerte, genauer: Reihen von Meßwertpaaren. Wir können von den Datenpaaren der Urliste ausgehen und die Berechnung nach der Formel

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} X_i)^2}{N}\right]\left[\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{N} Y_i)^2}{N}\right]}} \qquad \begin{matrix}(77)\\(Pr.24)\\(Pr.25)\end{matrix}$$

vornehmen.

Z. B. möchten wir den Zusammenhang zwischen den Durchschnittsnoten des Abiturzeugnisses und der Examensnoten in einem bestimmten Studienfach feststellen. Wir haben dazu folgende Daten vorliegen (wobei die 1. Zahl jeweils der Notendurchschnitt im Abitur, die 2. die Examensnote ist):
2.25 - 3.37, 4.11 - 3.44, 1.98 - 2.89, 3.49 - 2.10, 1.23 - 1.79, 1.53 - 3.00, 2.68 - 1.95, 3.44 - 3.09, 3.75 - 2.89, 3.60 - 2.99.

Als Korrelationskoeffizienten errechnen wir + .341. Vermutlich möchten wir nun auch wissen, ob und gegebenenfalls auf welchem Niveau diese Korrelation signifikant ist. Dies können wir sehr leicht anhand der in Tab. 9 zusammengestellten kritischen Werte klären. Unsere Korrelation von + .341 ist bei 8 Freiheitsgraden (df = N - 2) nicht signifikant.
Der Korrelationskoeffizient enthält eine wichtige Information über den Betrag der gemeinsamen Varianz zwischen den Variablen X und Y:

$$VA = 100 \cdot r^2 \,\%. \qquad (78)$$

In unserem Fall erhalten wir eine Varianzaufklärung bzw. eine gemeinsame Varianz von $100 \cdot 0.341^2 = 11.63\,\%$.

## 3.2. Die Rangkorrelation

Manchmal haben wir für die zu vergleichenden Variablen keine genauen Meßzahlen, sondern nur Rangordnungen zur Verfügung, etwa die Beliebtheit von Freizeitbeschäftigungen bei 14jährigen Jungen und Mädchen:

| | Knaben | Mädchen | d | $d^2$ |
|---|---|---|---|---|
| Sport | 1 | 4 | -3 | 9 |
| Fernsehen | 3 | 5 | -2 | 4 |
| Lesen | 6 | 6 | 0 | 0 |
| Kino | 4 | 7 | -3 | 9 |
| Tanzen | 8 | 8 | 0 | 0 |
| Theater | 9 | 9 | 0 | 0 |
| Konzert | 10 | 10 | 0 | 0 |
| Musik hören | 5 | 1 | 4 | 16 |
| Spazierengehen | 7 | 3 | 4 | 16 |
| Basteln, Handarbeit | 2 | 2 | 0 | 0 |
| | | | | 54 |

Für die Berechnung einer Rangkorrelation gilt dann die Formel

$$R_{xy(Sp)} = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N^3 - N}. \qquad (79)$$

(Pr.26)

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$R = 1 - \frac{6 \cdot 54}{10^3 - 10} = 0.673.$$

(N ist die Anzahl der verglichenen Paare, hier der Freizeitbeschäftigungen.)

## 3.3. Der Phi-Koeffizient

Möchten wir den Zusammenhang zwischen 2 jeweils alternativ auftretenden Merkmalen überprüfen, ermitteln wir den sogenannten Phi-Koeffizienten. Dazu muß zunächst eine sogenannte Vierfelder-Tafel erstellt werden:

| | | Merkmal X Alternative I | Alternative II | |
|---|---|---|---|---|
| Merkmal Y | Alt. I | a | b | a + b |
| | Alt. II | c | d | c + d |
| | | a + c | b + d | N |

Der Phi-Koeffizient errechnet sich dann nach der Beziehung

$$\text{Phi} = \frac{bc - ad}{\sqrt{(a+c)\cdot(b+d)\cdot(a+b)\cdot(c+d)}}. \qquad (80)$$

Phi ist dann signifikant, wenn das zugehörige Vierfelder-$Chi^2$ signifikant ist, das nach der schon vorgestellten Formel (65) ermittelt wird. Da wir zur Signifikanzprüfung also ohnehin das $Chi^2$ benötigen, wird es sich meist empfehlen, Phi aus diesem über die Bestimmung

$$Phi = \sqrt{\frac{Chi^2}{N}} \tag{81}$$

zu berechnen.
Der Phi-Koeffizient ist nicht ohne weiteres mit einem Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten vergleichbar, da er nicht immer alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Um die Vergleichbarkeit herzustellen, berechnet man nach der Formel

$$r = \frac{bc - ad}{(b+d)\cdot(a+b)} \qquad \text{(wobei } a + b \leq c + d \text{ und } b + d \leq a + c \text{ sein muß)} \tag{82}$$

ein Äquivalent für einen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten.

Die angegebene Bedingung können wir leicht erfüllen, wenn wir die Vierfelder-Tafel so ordnen, daß als Alternative I von Y jene Merkmalsausprägung mit der geringeren Häufigkeit und analog als Merkmal II von X ebenfalls das seltener auftretende bezeichnet wird.
Es habe sich in einer Stichprobe von 500 Versuchspersonen die folgende Verteilung der alternativen Merkmale männlich/weiblich und ungelernte/gelernte Berufstätigkeiten ergeben:

| | Männer | Frauen | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| Ungelernte | 78 | 124 | 202 |
| Gelernte | 207 | 91 | 298 |
| $\sum$ | 285 | 215 | 500 |

Wir rechnen dann für $Chi^2$:

$$Chi^2 = \frac{500\cdot(78\cdot 91 - 124\cdot 207)^2}{285\cdot 215\cdot 202\cdot 298} = 46{,}746.$$

Für df = 1 (Eine Vierfelder-Tafel hat 1 Freiheitsgrad, wenn die Formel (65) angewendet wird!) ist der kritische Wert für das 0,1%-Niveau nach Tabelle 2 10,83. Der Zusammenhang ist also äußerst signifikant. Für Phi erhalten wir:

$$Phi = \sqrt{\frac{46{,}746}{500}} = 0{,}306.$$

Als Äquivalent unseres Phi zu einem Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten ergibt sich:

$$r = \frac{124\cdot 207 - 78\cdot 91}{(124 + 91)\cdot(78 + 124)} = 0{,}428.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Geschlecht und der Tendenz, einen gelernten Beruf auszuüben, ist demnach nur mittelmäßig, wenn auch statistisch sehr gut abgesichert.

## 3.4. Der Kontingenz-Koeffizient

Sind die Variablen X und Y einerseits nicht intervallskaliert, andererseits aber auch nicht nur alternativ, sondern k- und l-fach gestuft, berechnet man einen sog. Kontingenzkoeffizienten.
Dazu legt man in der oben auf S.31 gezeigten Weise eine Kontingenz-Tafel an, ermittelt für diese das $Chi^2$ nach (32) und berechnet daraus den Kontingenzkoeffizienten C nach der Beziehung

$$C = \sqrt{\frac{Chi^2}{Chi^2 + N}}. \qquad (83)$$

Dieser hat allerdings den Nachteil, daß sein Maximalwert nicht in allen Fällen bei 1.00 liegt, wie bei einem Korrelationskoeffizienten, so daß nur Werte von Kontingenztafeln mit gleich vielen Spalten und Zeilen vergleichbar sind. Daher suchte man nach einem Weg, aufgrund des Kontingenzkoeffizienten zu einer Schätzung eines entsprechenden Korrelationskoeffizienten zu gelangen. Es ist

$$r \approx \frac{C}{C_{max}}. \qquad (84)$$

Die Werte für $C_{max}$ (die maximalen Beträge für C bei Kontingenztafeln mit k Spalten und k Zeilen) können der Tabelle 11 entnommen werden. Das Verfahren ist also zunächst nur anwendbar auf quadratisch angelegte Kontingenztabellen. In unserem oben auf S.31 angeführten Beispiel für den Zusammenhang zwischen Familienstand und sexuellen Interessen haben wir 3 Zeilen und 4 Spalten, so daß die Bedingung nicht erfüllt ist. Wir können dennoch zu einer ungefähren Schätzung des Korrelationskoeffizienten kommen, wenn wir für $C_{max}$ das arithmetische Mittel der Maximalwerte für 3 und 4 Klassen zugrunde legen, also

$$C_{max} = (0{,}816 + 0{,}866) : 2 = 0{,}841.$$

Für das genannte Beispiel ergibt sich dann ein geschätzter Korrelationskoeffizient von 0,399.
Zur Signifikanzprüfung eines Kontingenzkoeffizienten ziehen wir jeweils das zugehörige Chi-Quadrat unter Zugrundelegung der entsprechenden Zahl der Freiheitsgrade heran.

## 3.5. Korrelationen mit dichotomen Variablen

Oft ist es nötig, etwas über den Zusammenhang von intervallskalierten oder ordinalskalierten Merkmalen mit alternativ gestuften ( = dichotomen) Merkmalen auszusagen. Es kann sein, daß das zweite Merkmal wirklich dichotom ist (z.B. männlich - weiblich), oft kommt es aber auch vor, daß es an sich intervall- oder ordinalskaliert ist, aber aus forschungstechnischen Gründen nur in zwei Ausprägungen erfaßt werden kann (z.B. Blutalkohol $< 0{,}8$ Promille und $\geq 0{,}8$ Promille).
Die Statistik kennt dazu eine ganze Reihe, zum Teil recht umständlicher Verfahren (vor allem die punktbiseriale und die biseriale Korrelation sowie die bise-

riale Rangkorrelation). Man kann solche Fälle aber auch recht gut über die Produkt-Moment-Korrelation und die Zusammenhangsmaße für Nominaldaten abwickeln.
Dazu müssen dichotome Variablen (oft auch "Dummy-Variablen" genannt) eingeführt werden: Das alternativ gestufte Merkmal erhält in der einen Ausprägung durchgehend eine 1, in der anderen durchgehend eine 0 zugeordnet. Im übrigen kann dann mit den Wertepaaren in der gewohnten Weise verfahren werden.

Wir illustrieren diese Vorgehensweise an zwei Beispielen:
Nachstehend sollen Ergebnisse einer Intelligenzuntersuchung bei Hauptschülern mit und ohne qualifizierenden Abschluß überprüft werden:

| Vp | Abschluß | IQ | Vp | Abschluß | IQ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 114 | 11 | 1 | 125 |
| 2 | 1 | 101 | 12 | 1 | 112 |
| 3 | 1 | 122 | 13 | 0 | 113 |
| 4 | 1 | 89 | 14 | 0 | 87 |
| 5 | 1 | 96 | 15 | 0 | 92 |
| 6 | 1 | 103 | 16 | 0 | 95 |
| 7 | 1 | 99 | 17 | 0 | 91 |
| 8 | 1 | 117 | 18 | 0 | 85 |
| 9 | 1 | 97 | 19 | 0 | 89 |
| 10 | 1 | 88 | 20 | 0 | 104 |
| | | | 21 | 0 | 102 |

wobei
1 = mit Abschluß
0 = ohne Abschluß

Demnach haben also die Vpn 1 bis 12 den qualifizierenden Abschluß gemacht, die Vpn 13 bis 21 nicht.
Die Werte für "Abschluß" und "IQ" werden wie üblich nach (77) in einer Produkt-Moment-Korrelation verrechnet. Es ergibt sich ein Wert von + 0,418, d.h. es besteht ein mäßiger Zusammenhang zwischen dem Besitz des qualifizierenden Abschlusses und der Intelligenzhöhe. Bei 21 - 2 = 19 Freiheitsgraden wäre für das 5%-Niveau eine Korrelation mindestens vom Betrage 0,433 erforderlich. Der Zusammenhang ist also nicht signifikant.
Ein anderes Beispiel möge die Kombination einer ordinalskalierten und einer dichotomen Variablen veranschaulichen:
Es sei die Aggressivität von N = 20 Kindern, die teilweise in einem Heim (Codierung mit 1), teilweise in einer Familie (Codierung mit 0) aufwuchsen, in einer Rangordnung bekannt:

| Vpn | Familie Heim | Aggressivität | Vpn | Familie Heim | Aggressivität |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 11 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 7 | 12 | 0 | 16 |
| 3 | 1 | 4 | 13 | 0 | 17 |
| 4 | 1 | 9 | 14 | 0 | 3 |
| 5 | 1 | 11 | 15 | 0 | 20 |
| 6 | 1 | 5 | 16 | 0 | 19 |
| 7 | 1 | 10 | 17 | 0 | 13 |
| 8 | 1 | 6 | 18 | 0 | 18 |
| 9 | 0 | 12 | 19 | 0 | 8 |
| 10 | 0 | 14 | 20 | 0 | 15 |

Da die Angaben über Aggressivität Rangdaten sind (niedrige Rangplätze mögen hohe Aggressivität bedeuten) und ein spezielles Verfahren für die Kombination solcher mit einer dichotomen Variablen (die biseriale Rangkorrelation) sehr aufwendig ist, transformieren wir die Rangdaten in Nominaldaten, was durchaus zulässig ist: Wir legen eine Vierfelder-Tafel an, indem wir auch die Ränge in zwei Gruppen einteilen.

| | | niedrige Aggressivität 11 bis 20 | hohe Aggressivität 1 bis 10 |
|---|---|---|---|
| "Familie" | 1 | 7 | 1 |
| "Heim" | 0 | 3 | 9 |

Dafür errechnen wir ein Vierfelder-Chi$^2$ nach (65) zu 7,5, welches auf dem 1%-Niveau signifikant ist, sowie ein Äquivalent für einen Korrelationskoeffizienten nach (65) zu 0,75 (wobei die auf S.40 angegebenen Vorschriften für die Anordnung der Vierfelder-Tafel beachtet werden müssen). Es besteht also ein sehr signifikanter Zusammenhang zwischen niedriger Aggressivität und "Familienkindheit". Übrigens muß man natürlich darum bemüht sein, daß die erwarteten Häufigkeiten in den Feldern möglichst nicht unter 10 absinken. Man kann das prüfen, indem man die niedrigste Zeilensumme mit der niedrigsten Spaltensumme multipliziert und das Ergebnis durch die Gesamtsumme dividiert. In unserem Beispiel ergäbe sich so für die beiden oberen Felder eine erwartete Häufigkeit von je 4,0 und für die unteren eine solche von 6. Die gemachten Aussagen stehen somit auf wackeligen Füßen. Natürlich kann man ebensogut eine Kontingenztafel konstruieren, wenn die Datenmenge hinreichend groß ist, und es besteht keinerlei methodische Notwendigkeit, die Rangskala zu gleichen Anteilen zu unterteilen, wie dies in unserem Beispiel geschah.

## 3.6. Der Konkordanz-Koeffizient

Gelegentlich kann es sich als nötig erweisen, mehrere Rangreihen auf das Maß ihrer Übereinstimmung (Konkordanz) zu prüfen. Hier ist uns ein Verfahren zur Ermittlung eines Konkordanz-Koeffizienten von Nutzen, das von Kendall entwickelt worden ist. Angenommen, 5 Schulklassen hätten 8 Lehrkräfte nach mehr oder weniger autoritärem Führungsstil in eine Rangreihe zu bringen:

| | L 1 | L 2 | L 3 | L 4 | L 5 | L 6 | L 7 | L 8 | Gesamtsumme |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Klasse 8a | 4 | 3 | 1 | 2 | 5 | 8 | 7 | 6 | |
| Klasse 8b | 4 | 2 | 3 | 1 | 5 | 7 | 6 | 8 | |
| Klasse 8c | 3 | 2 | 1 | 4 | 6 | 3 | 5 | 7 | |
| Klasse 9a | 2 | 3 | 1 | 6 | 4 | 6 | 7 | 8 | |
| Klasse 9c | 1 | 3 | 2 | 5 | 4 | 7 | 6 | 8 | |
| $\sum R$ | 14 | 13 | 8 | 17 | 24 | 36 | 31 | 37 | 180 |

mittl. Rangsumme $M_R = 180 : 8 = 22,50$.

Der Konkordanzkoeffizient W wird dann nach der Formel

$$W = \frac{(M_R - \sum_{i=1}^{N} R_i)^2}{\frac{1}{12} k^2 \cdot (N^3 - N)} \qquad (85)$$

(Pr.28)

berechnet, wobei N für die Anzahl der Beurteilten (hier der Lehrer), k für die Anzahl der Beurteiler (hier der Klassen) steht.
Die Signifikanzprüfung erfolgt mit Hilfe von Tabelle 12, in welcher wir die kritischen Werte für den Zähler des Konkordanzkoeffizienten nachschlagen können.

Um eine bessere Vergleichbarkeit mit den gebräuchlicheren Korrelationsmaßen zu gewährleisten, wird der Konkordanzkoeffizient gern nach der Beziehung

$$\bar{R} = \frac{kW - 1}{k - 1} \qquad (86)$$

in einen mittleren Rang-Korrelationskoeffizienten umgerechnet.
Für $k \leq 7$ finden wir in Tabelle 12 kritische Werte zum Zähler von W. Für k 7 können wir ein $Chi^2$ nach der Beziehung :

$$Chi^2 = k\,(N - 1)\,W \qquad (87)$$

als Prüfgröße errechnen.

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$W = \frac{(22,5-14)^2+(22,5-13)^2+(22,5-8)^2+(22,5-17)^2+(22,5-24)^2+(22,5-36)^2}{\frac{1}{12} \cdot 5^2 \cdot (8^3-8)}$$

$$+ \frac{(22,5-31)^2+(22,5-37)^2}{\frac{1}{12} \cdot 5^2 \cdot (8^3 - 8)} = \frac{870,00}{1050,00} = 0,829.$$

In Anbetracht eines kritischen Wertes von 556,5 für den Zähler ist die Konkordanz auf dem 1%-Niveau signifikant.
Als mittlere Rangkorrelation errechnet sich:

$$\bar{R} = \frac{5 \cdot 0,829 - 1}{5 - 1} = 0,786.$$

W kann nur Werte zwischen 0 (keine Konkordanz) und +1 (maximale Konkordanz) annehmen.

## 3.7. Mittlere Korrelationen

Hin und wieder kommt man in die Lage, aus mehreren einzelnen Korrelationskoeffizienten einen MITTLEREN KORRELATIONSKOEFFIZIENTEN errechnen zu müssen. Dazu darf man sich nicht ohne weiteres der Technik des arithmetischen Mittels bedienen. Die Korrelationen müssen vielmehr erst nach einer von Fisher entwickelten Transformation in Z-Werte umgerechnet werden, wobei

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right); \qquad df = N - 3. \tag{88}$$

Sofern wir Korrelationen aus unterschiedlich großen Populationen mitteln wollen, müssen wir sie mit den entsprechenden Freiheitsgraden gewichten:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{c} (n_i - 3) \cdot Z_i}{\sum_{i=1}^{c} (n - 3)} \qquad \text{für ungleiche Stichproben,} \tag{89}$$

(Pr.29)

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{c} Z_i}{c} \qquad \text{für gleiche Stichproben (wobei c = Anzahl der Stichproben).} \tag{90}$$

(Pr.30)

## 3.8. Partialkorrelationen

Die Korrelation von zwei Variablen kann durch weitere Variablen vermittelt sein. So läßt sich z.B. sicher eine beträchtliche Korrelation zwischen den Schulleistungen in Mathematik und Physik ermitteln. Dabei erscheint jedoch die Vermutung nicht ganz unbegründet, diese Korrelation möchte etwa durch die Fähigkeit zu abstrakt-logischem Denken, ohne die gute Leistungen in beiden Fächern nicht oft vorkommen dürften, zumindest mit bedingt sein. Wir könnten nun an der Frage interessiert sein, wie stark die Leistungen in beiden Fächern unter Berücksichtigung dieser mutmaßlichen Abhängigkeit sind. Wir dürften dann nur Schüler mit gleicher Fähigkeit zu abstrakt-logischem Denken miteinander vergleichen, d.h. wir müßten diese 3. Variable konstant halten, um ihren Einfluß auszuschalten. Das wird aber praktisch nicht immer möglich sein. Ein Verfahren zur rechnerischen Ausschaltung von Variablen ist die sogen. PARTIALISIERUNG VON KORRELATIONEN:

$$r_{1-2(3)} = \frac{r_{1-2} - r_{1-3} r_{2-3}}{\sqrt{\left(1 - r_{1-3}^2\right)\left(1 - r_{2-3}^2\right)}}. \tag{91}$$

(Pr.31)

Wir führen es an einem Beispiel vor. In einer Untersuchung über faule Schüler ergab sich folgende Korrelationsmatrix:

Tab. 1

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | - | | | |
| 2 | +.70 | - | | |
| 3 | +.74 | +.76 | - | |
| 4 | +.87 | +.67 | +.50 | - |

1 = "Faulheit"
2 = "Belastung durch schulische Umwelt"
3 = "Belastung durch außerschulische Umwelt"
4 = "Belastung durch Persönlichkeitsfaktoren"

Wir möchten nun z.B. die Variable "Persönlichkeitsfaktoren" ausschalten. Angenommen,wir wollen eine Partialisierung der Korrelation zwischen Faulheit und Belastung durch schulische Umwelt vornehmen. Dann ist:

$r_{1-2(3)} = r_{\text{Faulheit - Bel. durch schul.Umw.(Pers.F.)}}$

$r_{1-3} = r_{\text{Faulheit - Pers.F.}}$

$r_{2-3} = r_{\text{Bel. durch schul.Umw. - Pers.F.}}$

$r_{1-2} = r_{\text{Faulheit - Bel. durch schul.Umwelt}}$

Wir rechnen also:

$$r_{1-2(3)} = \frac{0{,}70 - 0{,}87 \cdot 0{,}67}{\sqrt{(1 - 0{,}87^2) \cdot (1 - 0{,}67^2)}} = 0{,}32 .$$

Entsprechend lassen sich die anderen Korrelationen partialisieren. Als Matrix der Partial-Korrelationen nach Ausschaltung der Variablen "Persönlichkeitsfaktoren" ergibt sich:

Tab. 2

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | - | | |
| 2 | +.32 | - | |
| 3 | +.71 | +.66 | - |

# 4. Regressionsrechnung

Korrelationsrechnung dient im wesentlichen der Überprüfung von Zusammenhangshypothesen und insoweit theoretischen Zwecken. In der Praxis ist aber oft die Frage von Interesse, welche Vorhersagen wir aufgrund einer bestimmten Anzahl von Datenpaaren machen können. Diesem Problem, Werte einer Variablen aufgrund von Werten einer anderen vorherzusagen, geht die Regressionsrechnung nach. Das mathematische Problem besteht in allen Fällen darin, eine Kurve zu finden, welche den Gesamttrend der Werte für X und Y am besten wiedergibt.

## 4.1. Die lineare Regression (Pr. 33)

In diesem (zugleich am häufigsten angewendeten) Verfahren wird versucht, als Trendlinie eine Gerade zu ermitteln. Bekanntlich hat eine solche die folgende Gleichung:

$$Y_i = a + bx_i . \tag{92}$$

Der Koeffizient b wird nach der folgenden Beziehung errechnet:

$$b = \frac{N \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{N} X_i \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i}{N \sum_{i=1}^{N} X^2 - (\sum_{i=1}^{N} X)^2} . \tag{93}$$

Für a ermitteln wir dann:

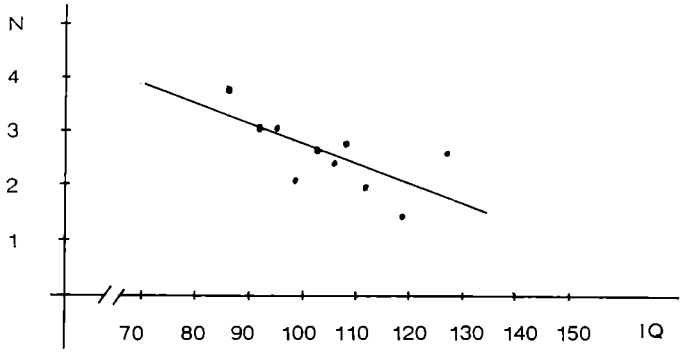
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_i}{N} - b \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} . \tag{94}$$

Dabei ist $Y_i$ = vorhergesagter Wert für die Variable Y,
$X_i$ = Wert der Variable X, für welchen eine Prognose erstellt werden soll.

X, die Variable, welche zur Vorhersage benutzt wird, heißt in der Regressionsrechnung die Prädikatorvariable, Y, die Variable, die prognostiziert wird, heißt Kriteriumsvariable. Gewöhnlich wählt man als Prädikatorvariable eine relativ einfach zu messende. Natürlich soll sie außerdem hoch mit der Kriteriumsvariablen korrelieren.
Wir wählen als Beispiel 10 Schüler, deren Intelligenzquotient und Notendurchschnitt ermittelt wurde:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IQ (=X) | 95 | 108 | 127 | 103 | 119 | 86 | 92 | 106 | 112 | 99 |
| Y (=Y) | 3,11 | 2,88 | 2,65 | 2,70 | 1,44 | 3,79 | 3,31 | 2,45 | 2,00 | 2,13 |

N = 10




$\sum X = 1047;\ \sum X^2 = 111029;\ \sum Y = 26{,}46;$
$\sum XY = 2717{,}53;$

$$b = \frac{10 \cdot 2717{,}53 - 1047 \cdot 26{,}46}{10 \cdot 111029 - 1047^2} = -0{,}0375;$$

$$a = \frac{26{,}46}{10} - (-0{,}0375) \cdot \frac{1047}{10} = 6{,}572.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:
$Y_i = 6{,}572 - 0{,}0375X_i$.

Setzen wir für $X_i$ (IQ) einen Wert von 140 ein, errechnen wir einen prognostizierten Notendurchschnitt von 1,32. Für $X_i = 78$ sagen wir einen Notendurchschnitt von 3,65 vorher.

In den meisten Fällen wird man an der Sicherheit solcher Prognosen interessiert sein. Mit Hilfe der nachstehenden Beziehung läßt sich berechnen, in welchem Vertrauensintervall ein prognostizierter Wert für Y bei einem erwünschten Signifikanz-Niveau von p% liegt:

$$VI_R = Y_i \pm t_{(p/2)} \sqrt{\frac{N \cdot SD^2_{YN} - N \cdot b^2 \cdot SD^2_{XN}}{N - 2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{N} + \frac{(X_i - \bar{X})^2}{N \cdot SD^2_{XN}}}, \qquad (95)$$

(Pr.34)

wobei df für t = N - 2,
$Y_i$ = vorhergesagter Y-Wert,
$X_i$ = X-Wert, welcher der Vorhersage zugrunde liegt,
$SD_{XN}$, $SD_{YN}$ = Standardabweichung von X bzw. Y mit dem Nenner N.

In unserem Beispiel hätten wir, falls wir unsere Prognose auf dem 5%-Niveau absichern wollen, zu rechnen:

$$VI = 1{,}32 \pm 2{,}306 \sqrt{\frac{10 \cdot 0{,}648^2 - 10 \cdot (-0{,}0375)^2 \cdot 11{,}866^2}{10 - 2}} \sqrt{1 + \frac{1}{10} + \frac{(140 - 104{,}7)^2}{10 \cdot 11{,}866^2}};$$

$VI = 1{,}32 \pm 1{,}71,$
also gilt:

$$-0{,}39 \leq \bar{N}_{IQ=140} \leq 3{,}03.$$

($SD_{XN}$ und $SD_{YN}$ wurden nach Formel 9 berechnet).

Es zeigt sich, daß unsere Prognose recht schlecht abgesichert ist:
Mit der gewünschten Sicherheit können wir eigentlich nur sagen, daß ein Schüler mit einem IQ = 140 keinen schlechteren Notendurchschnitt als 3,03 haben wird. Hingegen sind alle besseren Notendurchschnitte möglich, ja der Prognosebereich erstreckt sich bis zu einem nicht einmal möglichen negativen Wert von -0,39. Diese beträchtliche Unsicherheit unserer Prognose darf insofern nicht verwundern, als sie ja nur auf einem Datenmaterial von 10 Wertepaaren beruht.

## 4.2. Nichtlineare Regression

Die Gerade ist nicht immer die ideale Trendlinie für ein vorgefundenes Datenmaterial. Es gibt Fälle, in denen kompliziertere Linien, d.h. Kurven, eine bessere Anpassung ermöglichen.

### 4.2.1. Quadratische Regression (Pr. 35)

Für den Fall einer quadratischen Regressionslinie lautet die Bestimmungsgleichung:

$$Y_i = a + b_1 X_i + b_2 X_i^2. \tag{96}$$

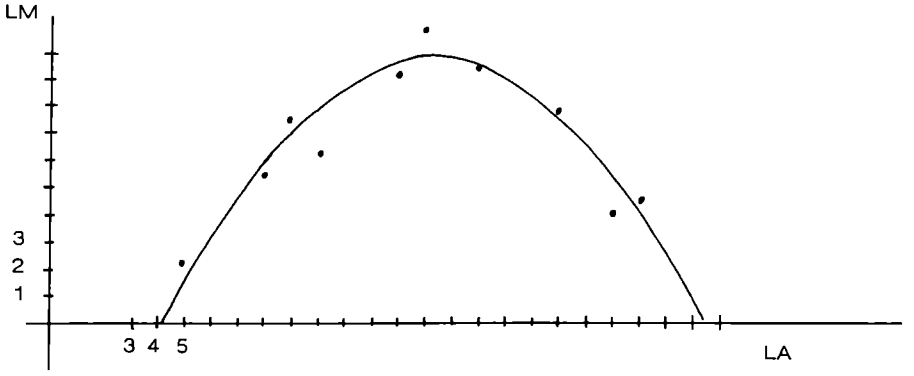
Die Koeffizienten werden aus 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten bestimmt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} Y_i &= a \cdot N + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2. \\ \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^3. \\ \sum_{i=1}^{N} X_i^2 Y_i &= a \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + b_1 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^3 + b_2 \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i^4. \end{aligned} \tag{97}$$

Als Beispiel wählen wir Testwerte für Leistungsanforderung (X) und Leistungsmotivation (Y):

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LA (=X) | 5 | 8 | 10 | 14 | 16 | 19 | 21 | 22 | 9 | 13 |
| LM (=Y) | 2,1 | 5,5 | 6,3 | 10,9 | 9,4 | 7,8 | 4,0 | 4,5 | 7,5 | 9,2 |

$N = 10;\ \sum X = 137;\ \sum X^2 = 2177;\ \sum X^3 = 38171;\ \sum X^4 = 712853.$
$\sum Y = 67{,}2;\ \sum XY = 938{,}8;\ \sum X^2 Y = 14497{,}4.$




$\boxed{1}$ $67{,}2 = 10\,a + 137\,b_1 + 2177\,b_2$.
$\boxed{2}$ $938{,}8 = 137\,a + 2177 b_1 + 38171\,b_2$.
$\boxed{3}$ $14497{,}4 = 2177\,a + 38171\,b_1 + 712853\,b_2$.
aus $\boxed{1}$: $\boxed{1'}$ $a = 6{,}72 - 13{,}7\,b_1 - 217{,}7\,b_2$.
aus $\boxed{2}$: $\boxed{2'}$ $a = 6{,}853 - 15{,}891\,b_1 - 278{,}620\,b_2$.
aus $\boxed{3}$:: $\boxed{3'}$ $a = 6{,}659 - 17{,}534\,b_1 - 327{,}447\,b_2$.
$\boxed{1'} = \boxed{2'}$: $6{,}72 - 13{,}7\,b_1 - 217{,}7\,b_2 = 6{,}853 - 15{,}891\,b_1 - 278{,}620\,b_2$.
daraus $\boxed{4}$: $b_1 = 0{,}061 - 27{,}805\,b_2$.
$\boxed{2'} = \boxed{3'}$: $6{,}853 - 15{,}891\,b_1 - 278{,}620\,b_2 = 6{,}659 - 17{,}534\,b_1 - 327{,}447\,b_2$.
daraus $\boxed{5}$: $b_1 = -0{,}118 - 29{,}718\,b_2$.
$\boxed{4} = \boxed{5}$: $0{,}061 - 27{,}805\,b_2 = -0{,}118 - 29{,}718\,b_2$.
daraus: $b_2 = -0{,}0936$.
$b_2$ in $\boxed{5}$: $b_1 = -0{,}118 - 29{,}718 \cdot (-0.0936)$; $b_1 = 2{,}663$.
$b_1$ und $b_2$ in $\boxed{1'}$: $a = 6{,}72 - 13{,}7 \cdot 2{,}663 - 217{,}7 \cdot (-0{,}0936)$; $a = -9{,}386$.

Die Regressionsgleichung lautet also:

$Y_i = -9{,}386 + 2{,}663\,X_i - 0{,}0936\,X_i^2$ (Kurve siehe Abbildung oben!)

### 4.2.2. Die kubische Regression (Pr. 36)

In manchen Fällen werden bessere Vorhersagen durch eine Gleichung 3. Grades der allgemeinen Form

$$Y = a + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3 \tag{98}$$

erzielt.
So mag sich Strenge der Bestrafung (X) auf die Leistungsmotivation (Y) so auswirken, daß mit zunehmender Strenge der Bestrafung zunächst ein langsamer Motivationsanstieg erzielt wird, der sich dann bei größerer Strenge beschleunigt, von einem bestimmten Punkt an jedoch wieder nachläßt und schließlich in einen Motivationsverfall umschlägt. In einer Untersuchung seien folgende Werte für X und Y gemessen worden:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 1 | 2,5 | 3,1 | 5 | 12,1 | 7,5 | 4 | 0,1 | 9,2 | 10,4 |
| Y | 2 | 2,8 | 9,2 | 14,5 | -20,5 | 10,2 | 8 | 1,1 | 7,0 | -1,5 |

Die Koeffizienten werden nach folgenden Bestimmungsgleichungen ermittelt:

$$\begin{aligned}
&1.)\ \sum Y_i = a \cdot N + b_1 \cdot \sum X_i + b_2 \cdot \sum X_i^2 + b_3 \cdot \sum X_i^3;\\
&2.)\ \sum X_iY_i = a \cdot \sum X_i + b_1 \cdot \sum X_i^2 + b_2 \cdot \sum X_i^3 + b_3 \cdot \sum X_i^4;\\
&3.)\ \sum X_i^2Y_i = a \cdot \sum X_i^2 + b_1 \cdot \sum X_i^3 + b_2 \cdot \sum X_i^4 + b_3 \cdot \sum X_i^5;\\
&4.)\ \sum X_i^3Y_i = a \cdot \sum X_i^3 + b_1 \cdot \sum X_i^4 + b_2 \cdot \sum X_i^5 + b_3 \cdot \sum X_i^6.
\end{aligned} \tag{99}$$

In unserem Beispiel haben wir zu rechnen:

$N = 10$; $\sum X = 54{,}9$; $\sum X^2 = 453{,}33$; $\sum X^3 = 4332{,}405$; $\sum X^4 = 44475{,}878$;
$\sum X^5 = 475212{,}07$; $\sum X^6 = 5208934{,}2$; $\sum Y = 32{,}8$; $\sum XY = 19{,}38$;
$\sum X^2Y = -1398{,}992$; $\sum X^3Y = -25606{,}027$;

1.) $32{,}8 = a \cdot 10 + b_1 \cdot 54{,}9 + b_2 \cdot 453{,}33 + b_3 \cdot 4332{,}405$;
2.) $19{,}38 = a \cdot 54{,}9 + b_1 \cdot 453{,}33 + b_2 \cdot 4332{,}405 + b_3 \cdot 44475{,}878$;
3.) $-1398{,}992 = a \cdot 453{,}33 + b_1 \cdot 4332{,}405 + b_2 \cdot 44475{,}878 + b_3 \cdot 475212{,}07$;
4.) $-25606{,}027 = a \cdot 4332{,}405 + b_1 \cdot 4475{,}878 + b_2 \cdot 475212{,}07 + b_3 \cdot 5208934{,}2$.

Wir lösen alle 4 Gleichungen nach a auf und erhalten:

1a) $a = 3{,}28 - 5{,}49b_1 - 45{,}333b_2 - 433{,}241b_3$;
2a) $a = 0{,}353 - 8{,}257b_1 - 78{,}914b_2 - 810{,}125b_3$;
3a) $a = -3{,}086 - 9{,}557b_1 - 98{,}109b_2 - 1048{,}270b_3$;
4a) $a = -5{,}910 - 10{,}266b_1 - 109{,}688b_2 - 1202{,}319b_3$.

Nun setzen wir 1a) = 2a), 1a) = 3a), 1a) = 4a) und lösen diese Gleichungen jeweils nach $b_1$ auf:

1a) = 2a):
$3{,}28-5{,}49b_1-45{,}333b_2-433{,}241b_3=0{,}353-8{,}257b_1-78{,}914b_2-810{,}125b_3$;
1b) $b_1 = -1{,}058-12{,}136b_2-136{,}207b_3$;
1a) = 3a):
$3{,}28-5{,}49b_1-45{,}333b_2-433{,}241b_3 = -3{,}086-9{,}557b_1-98{,}109b_2-1048{,}270b_3$;
2b) $b_1 = -1{,}565 - 12{,}976b_2 - 151{,}224b_3$;
1a) = 4a):
$3{,}28-5{,}49b_1-45{,}333b_2-433{,}241b_3= -5{,}910-10{,}266b_1-109{,}688b_2-1202{,}319b_3$;
3b) $b_1= -1{,}924-13{,}475b_2-161{,}030b_3$.

Im folgenden setzen wir 1b) = 2b) und 2b) = 3b) und errechnen daraus jeweils $b_2$:

1b) = 2b):
$-1{,}058-12{,}136b_2-136{,}207b_3 = -1{,}565-12{,}976b_2-151{,}224b_3$;
1c) $b_2= -0{,}604-17{,}877b_3$;
2b) = 3b):
$-1{,}565-12{,}976b_2-151{,}224b_3 = -1{,}924-13{,}475b_2-161{,}030b_3$;
2c) $b_2= -0{,}719-19{,}651b_3$;

1c) ist gleich 2c), und aus dieser Gleichung können wir $b_3$ errechnen:

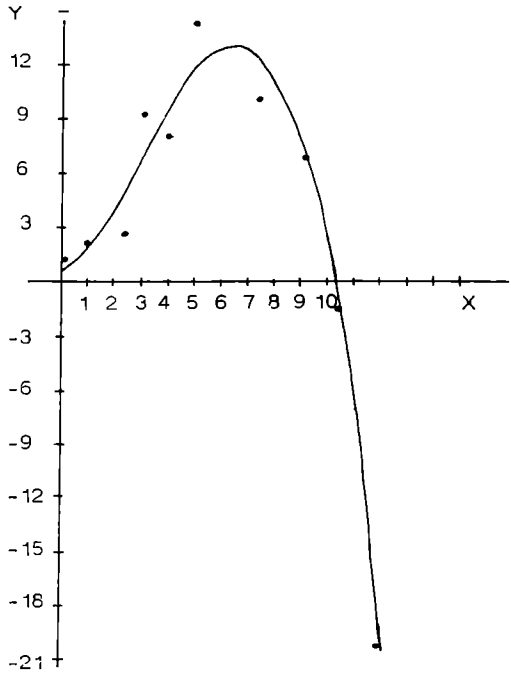
$-0{,}604-17{,}877b_3 = -0{,}719-19{,}651b_3$; $b_3 = -0{,}0648$;
$b_3$ in 1c) ergibt: $b_2 = -0{,}604-17{,}877 \cdot (-0{,}0648)$; $b_2 = 0{,}554$;
$b_2$ und $b_3$ in 1b) ergibt: $b_1 = -1{,}058-12{,}136 \cdot 0{,}554-136{,}207 \cdot (-0{,}0648)$;

$b_1 = 1{,}045$;
$b_1$, $b_2$ und $b_3$ in 1a) ist: $a = 3{,}28 - 5{,}49 \cdot 1{,}045 - 45{,}333 \cdot 0{,}554 - 433{,}241 \cdot (-0{,}0648)$;
$a = 0{,}502$.

Die Regressionsgleichung lautet somit:

$$Y_i = 0{,}502 + 1{,}045X_i + 0{,}554X_i^2 - 0{,}0648X_i^3 .$$

Die unten folgende Abbildung zeigt die Anpassung der Kurve an die Ausgangswerte.




### 4.2.3. Die Potenzregression (Pr. 37)

Gelegentlich findet man auch Zusammenhänge, die sich hinsichtlich ihres Trends am ehesten in der Form einer Gleichung nach der Formel

$$Y = aX^b \tag{100}$$

darstellen lassen.
In solchen Fällen nimmt man aus Gründen der Rechenvereinfachung eine lineare Transformation durch Logarithmieren der Gleichung vor. Man erhält dann:

$$\log Y = \log a + b \cdot \log X.$$

(Natürlich kann ebenso der natürliche Logarithmus verwendet werden.)

Dafür kann man setzen:

$$Y' = a' + bX'.$$

Anstelle der Urdaten von X und Y sind die logarithmierten Werte X' und Y' zu verrechnen wie in einer normalen linearen Regression. Man erhält dann unmittelbar den Koeffizienten b. a wird durch Delogarithmieren von a' ($a = 10^{a'}$) errechnet.
Nachstehend seien Wirkungseffekte (Y) einer Arzneimitteldosierung (X) aufgeführt und verrechnet:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wirkung (Y) | 5 | 5,5 | 6,2 | 7,4 | 8,3 | 9,1 | 9,8 | 9,5 | 12 | 11,8 |
| Dosierung (X) | 2 | 3,2 | 4,9 | 7,3 | 9 | 10,5 | 12,3 | 14,9 | 18 | 22,2 |
| log Y | 0,699 | 0,740 | 0,792 | 0,869 | 0,934 | 0,959 | 0,991 | 0,978 | 1,079 | 1,072 |
| log X | 0,301 | 0,505 | 0,690 | 0,863 | 0,954 | 1,021 | 1,090 | 1,173 | 1,255 | 1,346 |

$X' = \log X$; $Y' = \log Y$; $N = 10$;
$\sum X' = 9,198$; $\sum X'^2 = 9,470$; $\sum Y' = 9,113$; $\sum X'Y' = 8,775$.

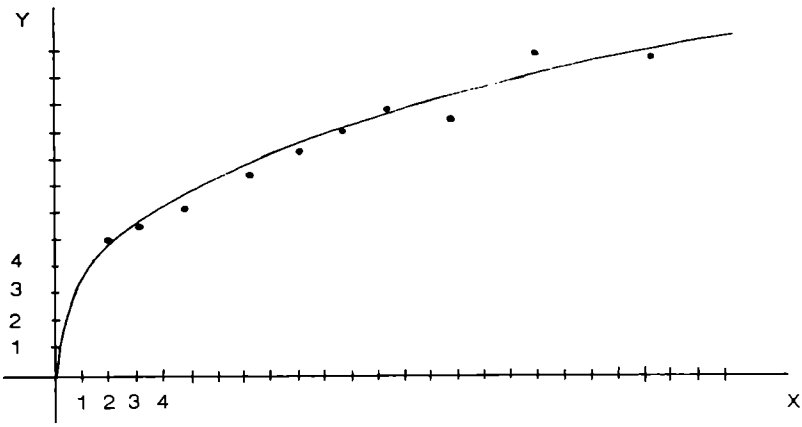
$$b = \frac{10 \cdot 8,775 - 9,198 \cdot 9,113}{10 \cdot 9,470 - 9,198^2} = 0,389;$$

$$a' = \frac{9,113}{10} - 0,389\,\frac{9,198}{10} = 0,553; \qquad a = 10^{0,553} = 3,573.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Y_i = 3,573\, X_i^{0,389}.$$

Die nachstehende Abbildung zeigt die Anpassung der Regressionskurve an die Ausgangswerte:



### 4.2.4. Die Exponentialregression (Pr. 38)

Eine weitere Kurve, nach welcher manchmal Daten prognostiziert werden können, wird durch die Gleichung

$$Y = ae^{bX} \tag{101}$$

bestimmt (e ist darin die Basis der natürlichen Logarithmen 2,718282). Sie läßt sich ebenfalls linear transformieren in die Beziehung:

$$Y' = a' + bX, \quad \text{worin } Y' = \ln Y \text{ und } a' = \ln a.$$

Wir untersuchen im folgenden Daten über Einkommen und Sparverhalten:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y (Sparrate) | 50 | 60 | 100 | 120 | 150 | 200 | 230 | 300 | 350 | 500 |
| X (Einkommen) | 800 | 1000 | 1200 | 1500 | 1800 | 2000 | 2200 | 2500 | 2700 | 3000 |
| Y' = lnY | 3,912 | 4,094 | 4,605 | 4,787 | 5,011 | 5,298 | 5,438 | 5,704 | 5,858 | 6,215 |

$N = 10;$
$\sum X = 18700; \ \sum X^2 = 39950000; \ \sum Y = 50,922; \ \sum XY = 100231,1;$

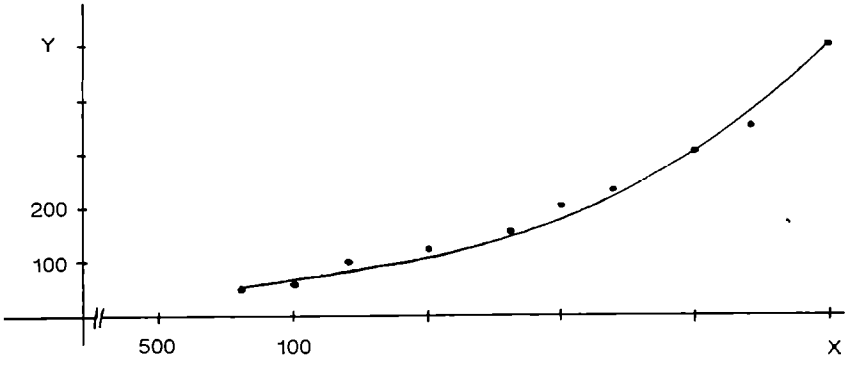
$$b = \frac{10 \cdot 100231,1 - 18700 \cdot 50,922}{10 \cdot 39950000 - 18700^2} = 0,001;$$

$$a' = \frac{50,922}{10} - 0,001 \cdot \frac{18700}{10} = 3,222; \quad a = e^{3,222} = 25,078.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Y = 25,078e^{0,001X}.$$

Die nachstehende Graphik gibt die Anpassung der Regressionskurve an die Ausgangsdaten wieder:



### 4.2.5. Die logarithmische Regression (Pr. 39)

Manchmal findet man schließlich Verhältnisse vor, die am besten durch eine logarithmische Kurve angepaßt werden. Ihre allgemeine Gleichung lautet:

$$Y = a + b \cdot \ln X. \tag{102}$$

Auch sie läßt sich linear transformieren. Wir erhalten dann:

$$Y = a + bX',$$

wobei $X' = \ln X$. Im übrigen wird wieder wie bei einer normalen linearen Regression gerechnet. Es werden lediglich anstelle der X-Werte logarithmierte Werte verarbeitet. Die sich ergebenden Koeffizienten sind unmittelbar die gesuchten Koeffizienten a und b.
Für den Anstieg der Rechenfertigkeit (Y) in Abhängigkeit vom Zeitaufwand für Übungen (X) seien nachstehende Daten erhoben worden:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rechenfertigkeit (Y) | 4,9 | 5,0 | 4,0 | 4,6 | 5,1 | 4,7 | 5,4 | 5,0 | 5,6 | 5,2 |
| Übungszeit (X) | 1,2 | 2,1 | 2,5 | 3,7 | 4 | 6,4 | 8,8 | 9,7 | 12 | 15,5 |
| lnX (=X') | 0,182 | 0,742 | 0,916 | 1,308 | 1,386 | 1,856 | 2,175 | 2,272 | 2,485 | 2,741 |

Er ergibt sich dann:

$N = 10;\ \sum X' = 16{,}063;\ \sum X'^2 = 32{,}080;\ \sum Y = 49{,}5;\ \sum X'Y = 81{,}349;$

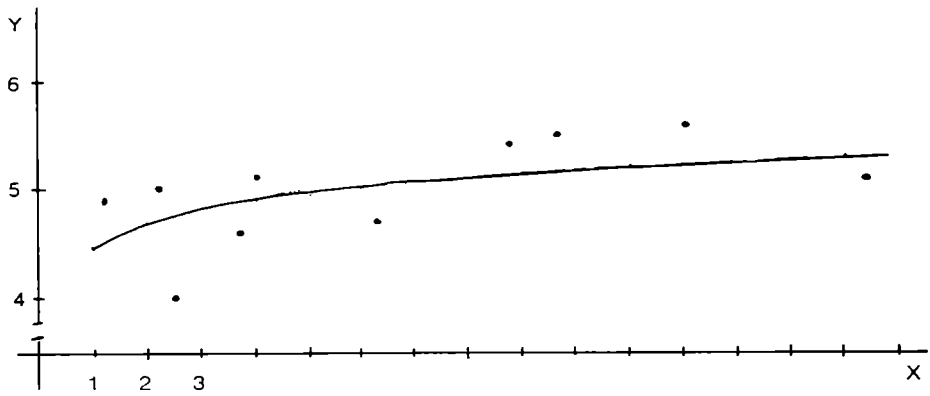
$$b = \frac{10 \cdot 81{,}349 - 16{,}063 \cdot 49{,}5}{10 \cdot 32{,}080 - 16{,}063^2} = 0{,}293;$$

$$a = \frac{49{,}5}{10} - 0{,}293 \cdot \frac{16{,}063}{10} = 4{,}479.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Y_i = 4{,}479 + 0{,}293 \ln X_i.$$

Die nachstehende Tabelle zeigt die Anpassung der Regressionskurve an die Ausgangsdaten:



## 4.3. Regressionsgüte (Pr. 40)

In manchen Fällen wird man nach dem Augenschein nicht zweifelsfrei entscheiden können, welche Regressionslinie den Gesamttrend eines vorliegenden Datenmaterials am besten repräsentiert. Durch Quadrieren der Abweichungen der vorhergesagten von den tatsächlichen Y-Werten und durch Aufaddieren der Quadrate kann die Prüfgröße

$$S = \sum_{i=1}^{N} (Y_b - Y_e)^2 \tag{103}$$

berechnet werden. Die beste Regressionslinie ist diejenige, für welche S den kleinsten Wert hat.
Wir führen das Verfahren an dem nachstehenden Beispiel vor:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 2 | 5 | 6 | 7 | 10 | 12 | 13 | 14 | 19 | 20 |
| Y | 3 | 9 | 11 | 6 | 18 | 12 | 15 | 4 | 7 | 24 |

Es ergeben sich folgende Werte der Prüfgröße S:

lineare Regression: S = 302,119,
quadratische Regression: S = 300,560,
kubische Regression: S = 263,226,
Potenzregression S = 313,996,
logarithmische Regression: S = 291,459,
exponentiale Regression: S = 326,654.

Demnach ist der Gesamttrend am besten durch eine kubische Regression erfaßbar.

## 4.4. Multiple Regression

Die Genauigkeit der Prognose mittels einer Regression kann im allgemeinen erheblich verbessert werden, wenn mehrere Prädiktorvariablen zur Vorhersage der Kriteriumsvariablen benützt werden. Nicht zuletzt diese Überlegungen haben beispielsweise in der Testtheorie zur Konstruktion ganzer Testbatterien geführt.

### 4.4.1. Multiple Regression mit zwei unabhängigen Variablen und einer abhängigen Variablen (Pr. 41)

Im einfachsten Fall einer multiplen Regression haben wir es mit zwei Prädiktor- und einer Kriteriumsvariablen zu tun. In diesem Fall gilt, wenn X und Z die unabhängigen Prädiktorvariablen sind und die Kriteriumsvariable Y genannt wird, folgende Regressionsgleichung:

$$z_{Y_i} = z_{X_i} \cdot b_X + z_{Z_i} \cdot b_Z . \tag{104}$$

Die Regression wird über die nach (28) z-standardisierten Werte gerechnet, d.h. es ist:

$$z_{Y_i} = \frac{Y_i - \bar{Y}}{SD_Y}; \qquad z_{X_i} = \frac{X_i - \bar{X}}{SD_X}; \qquad z_{Z_i} = \frac{Z_i - \bar{Z}}{SD_Z}.$$

Die Koeffizienten $b_X$ und $b_Z$ werden nach folgenden Beziehungen errechnet:

$$b_X = \frac{r_{XY} - r_{YZ} \cdot r_{XZ}}{1 - r_{XZ}^2}; \tag{105}$$

$$b_Z = \frac{r_{YZ} - r_{XY} \cdot r_{XZ}}{1 - r_{XZ}^2}. \tag{106}$$

Nach der Formel

$$R = \sqrt{b_X \cdot r_{XY} + b_Z \cdot r_{ZY}} \tag{107}$$

kann aus den Regressionskoeffizienten und aus den Korrelationen ein multipler Korrelationskoeffizient errechnet werden. Es ist sinnvoll, daß R nur zwischen 0 und 1 liegen kann, da der multiple Korrelationskoeffizient die Korrelation zwischen den prognostizierten und den tatsächlichen Werten von Y mißt.
Wir führen das Verfahren im folgenden anhand von Daten über Deutschnoten sowie Leistungen in einem Rechtschreib- und Lesetest vor. Die Regressionsgleichung soll dazu dienen, aufgrund der getesteten Rechtschreib- und Leseleistung die Deutschnote vorherzusagen.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Deutschnote(Y) | 2 | 4 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| Rechtschreibtest(X) | 30P | 18P | 28P | 30P | 20P | 21P | 17P | 19P | 11P | 28P |
| Lesetest(Z) | 14P | 9P | 13P | 18P | 17P | 16P | 12P | 9P | 6P | 17P |

$r_{XY} = -0{,}831$ $\quad \bar{X} = 22{,}200$ $\quad SD_X = 6{,}460$
$r_{XZ} = +0{,}772$ $\quad \bar{Y} = 2{,}800$ $\quad SD_Y = 1{,}317$
$r_{YZ} = -0{,}909$ $\quad \bar{Z} = 13{,}100$ $\quad SD_Z = 4{,}067$

$$b_X = \frac{-0{,}831 - (-0{,}909) \cdot 0{,}772}{1 - 0{,}772^2} = -0{,}320;$$

$$b_Z = \frac{-0{,}909 - (-0{,}831) \cdot 0{,}772}{1 - 0{,}772^2} = -0{,}662.$$

Die Regressionsgleichung lautet also:

$$Z_{Y_i} = -0{,}320 \cdot Z_{X_i} - 0{,}662 \cdot Z_{Z_i}.$$

Für die Werte $X_i = 30$ und $Z_i = 14$ rechnen wir für eine Prognose:

$$Z_{X_i} = \frac{30 - 22{,}2}{6{,}460} = 1{,}207; \quad Z_{Z_i} = \frac{14 - 13{,}1}{4{,}067} = 0{,}221;$$

$$Z_{Y_i} = -0{,}320 \cdot 1{,}207 - 0{,}662 \cdot 0{,}221 = -0{,}533;$$

$$Y_i = Z_{Y_i} \cdot SD_Y + \overline{Y} = -0{,}533 \cdot 1{,}317 + 2{,}800 = 2{,}098.$$

Aus diesen Daten läßt sich ein multipler Korrelationskoeffizient von

$$R = \sqrt{-0{,}320 \cdot (-0{,}831) + (-0{,}662) \cdot (-0{,}909)} = 0{,}931$$

errechnen.
Die gemeinsame Varianz zwischen Prädiktor- und Kriteriumsvariablen beträgt nach (78) 86,7%.

### 4.4.2. Multiple Regression mit drei Prädiktorvariablen und einer Kriteriumsvariablen (Pr. 42)

Selbstverständlich ist es auch möglich, Regressionen mit mehr als zwei Prädiktorvariablen zu rechnen. Die Genauigkeit und Zuverlässigkeit einer Prognose wird auf diesem Weg meistens weiter erhöht. Jedoch können Regressionen mit mehr als drei unabhängigen Variablen praktisch nur noch über eine EDV-Anlage ermittelt werden. Der komplexeste Datensatz, der noch einigermaßen günstig per Hand oder mit Taschenrechnern bearbeitet werden kann, umfaßt drei unabhängige Variablen W, X, Z und eine abhängige Variable Y.[1)]
Hierfür gilt folgende Regressionsgleichung:

$$z_{Y_i} = z_{W_i} \cdot b_W + z_{X_i} \cdot b_X + z_{Z_i} \cdot b_Z, \tag{108}$$

wobei

$$z_{Y_i} = \frac{Y_i - \overline{Y}}{SD_Y}$$ und entsprechend $z_{W_i}$, $z_{X_i}$ und $z_{Z_i}$ (nach (28) ).

Die Regressionskoeffizienten werden nach folgenden Formeln ermittelt:

$$b_W = \frac{r_{WY}\,(1-r_{XZ}^2) - r_{XY} \cdot (r_{WX} - r_{WZ} \cdot r_{XZ}) - r_{YZ} \cdot (r_{WZ} - r_{WX} \cdot r_{XZ})}{1 - r_{WX}^2 - r_{WZ}^2 - r_{XZ}^2 + 2 r_{WX} \cdot r_{WZ} \cdot r_{XZ}}; \tag{109}$$

$$b_X = \frac{r_{XY} - r_{YZ} \cdot r_{XZ} - b_W \cdot (r_{WX} - r_{WZ} \cdot r_{XZ})}{1 - r_{XZ}^2}; \tag{110}$$

$$b_Z = r_{YZ} - r_{WZ} \cdot b_W - r_{XZ} \cdot b_X . \tag{111}$$

Ein multipler Korrelationskoeffizient errechnet sich nach der Beziehung:

$$R = \sqrt{r_{WY} \cdot b_W + r_{XY} \cdot b_X + r_{YZ} \cdot b_Z} . \tag{112}$$

1) Auf die zugegebenermaßen recht rationelle Abwicklung des Verfahrens mit Matrizenalgebra wird hier verzichtet, da wir deren Beherrschung nicht voraussetzen wollen.

Nachstehend werden Daten über den Zusammenhang zwischen der physischen, emotionalen und geistigen Komponente des Biozyklus eines Schülers und Schulleistungen in einem Fach zu einer multiplen Regression verarbeitet, die eine Vorhersage der Schulleistung aufgrund der drei Komponenten des Biozyklus gestatten soll.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Schulleistung | Y | 3 | 2 | 3 | 4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 |
| phys. Zyklus | W | 0,89 | -0,23 | 0,14 | 0,56 | 0,01 | -0,19 | -0,97 | 0,46 | 0,36 | 0,08 |
| emot. Zyklus | X | -0,11 | 0,49 | 0,95 | -0,43 | 0,37 | -0,35 | 0,66 | 0,28 | -0,77 | 0,22 |
| geist. Zyklus | Z | 0,06 | 0,55 | 0,12 | -0,84 | 0,72 | 0,17 | 0,04 | -0,53 | -0,29 | 0,31 |

$r_{WY} = 0{,}206$ $\quad SD_Y = 1{,}350$ $\quad \bar{Y} = 3{,}4$

$r_{XY} = -0{,}480$ $\quad SD_W = 0{,}514$ $\quad \bar{W} = 0{,}111$

$r_{ZY} = -0{,}769$ $\quad SD_X = 0{,}536$ $\quad \bar{X} = 0{,}131$

$r_{WX} = -0{,}470$ $\quad SD_Z = 0{,}475$ $\quad \bar{Z} = 0{,}031$

$r_{WZ} = -0{,}432$

$r_{XZ} = 0{,}469$

Es ist

$$b_W = \frac{0{,}206(1-0{,}469^2)-(-0{,}48)[-0{,}47-(-0{,}432)\cdot(0{,}469)]-(-0{,}769)[-0{,}432-(-0{,}47)\cdot(0{,}469)]}{1-(-0{,}47)^2-(-0{,}432)^2-0{,}469^2+2\cdot(-0{,}47)\cdot(-0{,}432)\cdot 0{,}469} =$$

$$= -0{,}231;$$

$$b_X = \frac{-0{,}48-(-0{,}769)\cdot(0{,}469)-(-0{,}231)[-0{,}47-(-0{,}432)\cdot(0{,}469)]}{1-0{,}469^2} = -0{,}232;$$

$$b_Z = -0{,}769-(-0{,}432)\cdot(-0{,}231)-0{,}469\cdot(-0{,}232) = -0{,}760.$$

Also gilt die Regressionsgleichung:

$$Z_{Y_i} = -0{,}231 Z_{W_i} - 0{,}232 Z_{X_i} - 0{,}760 Z_{Z_i}.$$

Die Umformung der Werte erfolgt nach (28):

$$Z_X = \frac{X-\bar{X}}{SD_X}.$$

Für $W_i = 0{,}89$; $X_i = -0{,}11$ und $Z_i = 0{,}06$ prognostizieren wir also ein

$$Z_{Y_i} = \frac{0{,}89-0{,}111}{0{,}514}\cdot(-0{,}231) + \frac{-0{,}11-0{,}131}{0{,}536}\cdot(-0{,}232) + \frac{0{,}06-0{,}031}{0{,}475}\cdot(-0{,}76) = -0{,}292;$$

Da $Z_Y = \frac{Y-\bar{Y}}{SD_Y}$, ist $Y = Z_Y \cdot SD_Y + \bar{Y}$, so daß

$$Y_i = -0{,}292\cdot 1{,}35 + 3{,}4 = 3{,}005.$$

Für die multiple Korrelation R ergibt sich:

$$R = \sqrt{-0{,}231 \cdot 0{,}206 - 0{,}232 \cdot (-0{,}48) - 0{,}76 \cdot (-0{,}769)} = 0{,}805.$$

Dieser Wert liegt nur geringfügig über der Korrelation $r_{ZY} = -0{,}769$, was anzeigt, daß die durch die Variablen W und X zusätzlich vermittelte Information nicht sehr groß ist.

### 4.4.3. Signifikanzprüfung

Eine multiple Regression kann anhand des multiplen Korrelationskoeffizienten auf Signifikanz geprüft werden. Der nachstehende kritische Bruch ist mit V - 1 Zählerfreiheitsgraden und N - V Nennerfreiheitsgraden F-verteilt (wobei N = Größe der Stichprobe, aus welcher die Korrelationen errechnet wurden, V = Anzahl der Variablen):

$$CR = \frac{R^2(N - V)}{(1-R^2)\cdot(V-1)}. \qquad (113)$$

Fragen wir uns z.B., ob eine multiple Korrelation für 4 Variablen vom Wert 0,44 aus einer Stichprobe von 20 Versuchspersonen signifikant ist: Eine Korrelation von 0,44 wäre bei 20 Vpn gerade noch auf dem 5%-Niveau signifikant (Tabelle 9). Bilden wir den kritischen Bruch, so erhalten wir:

$$CR = \frac{0{,}44^2 \cdot (20-4)}{(1-0{,}44^2)\cdot(4-1)} = 1{,}280.$$

Damit erweist sich die multiple Korrelation als nicht signifikant. Für 4 - 1 = 3 Zähler- und 20 - 4 = 16 Nennerfreiheitsgrade beträgt der kritische Wert für das 25%-Niveau nach Tabelle 4 1,51.
Ist die multiple Korrelation signifikant, so können wir davon ausgehen, daß wir mit der Regressionsgleichung insgesamt nicht nur zufällige Effekte erklären.

Außer einer solchen pauschalen Signifikanzprüfung ist natürlich von besonderem Interesse, welche Signifikanz den einzelnen Regressionskoeffizienten (in der Fachliteratur spricht man häufig von sog. Beta-Gewichten) zukommt. Hierzu kann man eine Prüfung mittels eines t-verteilten kritischen Bruches vornehmen:

$$CR = \frac{b_W}{\frac{r^{WW}(1-R^2)}{N-V}}; \qquad (df = N - V). \qquad (114)$$

Hierin ist R der multiple Korrelationskoeffizient und $r^{WW}$ der Wert der Variablen W in der invertierten Matrix der Korrelationen der unabhängigen Variablen. Zur Bestimmung der invertierten Matrix bedarf es Verfahren der Matrizenrechnung, die normalerweise nur über EDV rationell abzuwickeln sind. Der TI-58 und der TI-59 verfügen aber im Standardmodul über ein Programm zur Matrizenrechnung, das auch die Durchführung der Inversion kleinerer Matrizen gestattet und für unse-

ren Bedarf völlig zureicht. Auch der HP 67 und der HP 69 enthalten im Magnetkartenstandardpaket ein Programm zur Inversion einer 3x3-Matrix.
Wir führen das Verfahren an unserem Biorhythmus-Beispiel vor:
Wir erstellen zunächst die Korrelationsmatrix:

| | W | X | Z |
|---|---|---|---|
| W | 1,000 | -0,470 | -0,432 |
| X | -0,470 | 1,000 | 0,469 |
| Z | -0,432 | 0,469 | 1,000 |

(Die Korrelation einer Variablen mit sich selbst wird als 1,000 angesetzt.)

Mittels des Matrizenrechnungsprogramms erhalten wir folgende invertierte Korrelationsmatrix:

| | W | X | Z |
|---|---|---|---|
| W | 1,386 | 0,475 | 0,376 |
| X | 0,475 | 1,445 | -0,472 |
| Z | 0,376 | -0,472 | 1,384 |

Für $b_W$ rechnen wir also:

$$CR_W = \frac{-0{,}231}{\sqrt{\frac{1{,}386(1-0{,}805^2)}{10-4}}} = -0{,}810.$$

Entsprechend erhalten wir für $b_X$ und $b_Z$:

$$CR_X = \frac{-0{,}232}{\sqrt{\frac{1{,}445(1-0{,}805^2)}{10-4}}} = -0{,}797;$$

$$CR_Z = \frac{-0{,}760}{\sqrt{\frac{1{,}384(1-0{,}805^2)}{10-4}}} = -2{,}667.$$

Bei df = 10 - 4 = 6 ist lediglich $b_Z$ auf dem 5%-Niveau signifikant (kritischer Wert: 1,943). D.h. die Güte unserer Prognose mit Hilfe der multiplen Regressionsgleichung beruht also im Grunde nur auf den Daten über den Zusammenhang zwischen dem geistigen Zyklus und der Schulleistung. Angaben über den physischen und über den emotionalen Zyklus führen zu keiner überzufälligen Verbesserung der Prognose.
Da wir im Grunde nur an zwei bzw. drei Elementen der invertierten Matrix, überdies nur an Matrizen mit 2 mal 2 bzw. 3 mal 3 Feldern interessiert sind, können wir die invertierten Elemente aber einfacher algebraisch ermitteln.

Für eine 2 mal 2-Matrix (also für eine multiple Regression mit einer Kriteriums- und zwei Prädiktorvariablen) gilt:

$$r^{XX} = r^{ZZ} = \frac{1}{1 - r_{XZ}^2}$$

(wobei X und Z die Prädiktorvariablen sind).

Für eine 3 mal 3-Matrix (also für eine multiple Regression mit einer abhängigen und drei unabhängigen Variablen) gilt:

$$r^{WW} = \frac{1}{①}\left[1 - \frac{④\left(r_{WZ}\frac{①}{③} - r_{WX}\right)}{③ - \frac{① \cdot ②}{③}}\right]; \qquad \begin{matrix}(116)\\(Pr.43)\end{matrix}$$

$$r^{XX} = \frac{1}{①}\left(1 - \frac{③}{③ - \frac{① \cdot ②}{③}}\right); \qquad \begin{matrix}(117)\\(Pr.43)\end{matrix}$$

$$r^{ZZ} = -\frac{\frac{①}{③}}{③ - \frac{① \cdot ②}{③}}. \qquad \begin{matrix}(118)\\(Pr.43)\end{matrix}$$

Zur größeren Übersichtlichkeit sind dabei folgende Kennziffern definiert:

$$① = 1 - r_{WX}^2;\ ② = 1 - r_{WZ}^2;\ ③ = r_{XZ} - r_{WX}r_{WZ};\ ④ = r_{WZ} - r_{WX}r_{XZ}.$$

# 5. Faktorenanalyse

## 5.1. Erstellen einer Korrelationsmatrix

Besonders im Zusammenhang mit der Intelligenzforschung ist in der Faktorenanalyse ein Verfahren entwickelt worden, welches es gestattet, eine Vielzahl von Korrelationen auf meistens erheblich weniger Faktoren zurückzuführen, aus denen die Varianz des Datenmaterials erklärt werden kann.
Wir führen das Verfahren an einem Beispiel vor, das wir dem Lehrbuch von Bortz entnehmen[1]. Die nachfolgende Aufstellung enthält Durchmesser (d), Länge (l), Grundfläche (G), Mantelfläche (M), Rauminhalt (R) und Raumdiagonale (t) von 27 Zylindern:

| d (=X) | l (=Y) | G (=Z) | M (=U) | R (=V) | t (=W) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0,79 | 6,28 | 1,57 | 2,23 |
| 2 | 2 | 3,14 | 12,57 | 6,28 | 2,83 |
| 3 | 2 | 7,07 | 18,85 | 14,14 | 3,61 |
| 1 | 3 | 0,79 | 9,43 | 2,36 | 3,16 |
| 2 | 3 | 3,14 | 18,85 | 9,43 | 3,61 |
| 3 | 3 | 7,07 | 28,27 | 21,21 | 4,24 |
| 1 | 4 | 0,79 | 12,57 | 3,14 | 4,12 |
| 2 | 4 | 3,14 | 25,13 | 12,57 | 4,47 |
| 3 | 4 | 7,07 | 37,70 | 28,27 | 5,00 |
| 1 | 2 | 0,79 | 6,28 | 1,57 | 2,24 |
| 2 | 2 | 3,14 | 12,57 | 6,28 | 2,83 |
| 1 | 3 | 0,79 | 9,42 | 2,36 | 3,16 |
| 2 | 3 | 3,14 | 18,85 | 9,42 | 3,61 |
| 3 | 3 | 7,07 | 28,27 | 21,21 | 4,24 |
| 1 | 4 | 0,79 | 12,57 | 3,14 | 4,12 |
| 2 | 4 | 3,14 | 25,13 | 12,57 | 4,47 |
| 3 | 4 | 7,07 | 37,70 | 28,27 | 5,00 |
| 1 | 2 | 0,79 | 6,29 | 1,57 | 2,24 |
| 2 | 2 | 3,14 | 12,57 | 6,28 | 2,83 |
| 3 | 2 | 7,07 | 18,85 | 14,14 | 3,61 |
| 1 | 3 | 0,79 | 9,42 | 2,36 | 3,16 |
| 2 | 3 | 3,14 | 18,85 | 9,42 | 3,61 |
| 3 | 3 | 7,07 | 28,27 | 21,21 | 4,24 |
| 1 | 4 | 0,79 | 12,57 | 3,14 | 4,12 |
| 2 | 4 | 3,14 | 25,13 | 12,57 | 4,47 |
| 3 | 4 | 7,07 | 37,70 | 28,27 | 5,00 |
| 3 | 2 | 7,07 | 18,85 | 14,14 | 3,61 |

1) Allerdings wird hier nacn einem anderen Verfahren gerechnet. Bortz setzt Matrizenalgebra voraus.

Es ergeben sich folgende Korrelationen:

| | X | Y | Z | U | V | W |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | | 0,00 | 0,99 | 0,81 | 0,90 | 0,56 |
| Y | | | 0,00 | 0,54 | 0,35 | 0,82 |
| Z | | | | 0,80 | 0,91 | 0,56 |
| U | | | | | 0,97 | 0,87 |
| V | | | | | | 0,77 |
| W | | | | | | |

Diese Matrix muß nun vollständig angeschrieben werden. Das ist kein Problem, da sie ja diagonalsymmetrisch angelegt ist, bis auf den Umstand, welche Zahlenwerte wir den Korrelationen einer Variablen mit sich selbst zuteilen sollen. Es scheint nahezuliegen, dafür 1,00 einzusetzen. Doch ist zu bedenken, daß eine Korrelation nur lineare Zusammenhänge erfaßt. Man fährt darum im allgemeinen besser, für die sog. Kommunalitäten den größten Wert der zugehörigen Zeile oder Spalte einzusetzen[1]. Danach erhalten wir die nachstehende Korrelationsmatrix:

| | X | Y | Z | U | V | W | | $a_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | (0,99) | 0,00 | 0,99 | 0,81 | 0,90 | 0,56 | | 0,85 |
| Y | 0,00 | (0,82) | 0,00 | 0,54 | 0,35 | 0,82 | | 0,50 |
| Z | 0,99 | 0,00 | (0,99) | 0,80 | 0,91 | 0,56 | | 0,85 |
| U | 0,81 | 0,54 | 0,80 | (0,97) | 0,97 | 0,87 | | 0,99 |
| V | 0,90 | 0,35 | 0,91 | 0,97 | (0,97) | 0,77 | | 0,97 |
| W | 0,56 | 0,82 | 0,56 | 0,87 | 0,77 | (0,87) | | 0,88 |
| $\sum$ | 4,25 | 2,53 | 4,25 | 4,96 | 4,87 | 4,45 | 25,31 | |
| $a_1$ | 0,85 | 0,50 | 0,85 | 0,99 | 0,97 | 0,88 | | |

## 5.2. Faktorisierbarkeit einer Matrix

Nun ist es in unserem Falle, da es sich um ein konstruiertes Beispiel handelt, außer Frage, daß eine Faktorenanalyse durchgeführt werden darf. Im Normalfall sollte einer Faktorenanalyse jedoch eine Prüfung vorausgehen, ob die Matrix überhaupt faktorisierbar ist, d.h. ob die Nullhypothese, alle Korrelationen beruhten auf Zufall, zurückgewiesen werden kann. Zu einer solchen Prüfung bedarf es aber Verfahren der Matrizenalgebra, die auf Taschenrechnern größtenteils nicht mehr abwickelbar sind. Die Rechner-Modelle TI-58/59 enthalten im Standardmodul jedoch ein Programm, welches Berechnungen an kleineren Matrizen erlaubt (bis zu einer 6 mal 6-Matrix beim TI-58 und bis zu einer 9 mal 9-Matrix beim TI-59). Damit können wir im vorliegenden Fall einen Signifikanz-Test nach Wilks durchführen. Die Prüfgröße ist ein $Chi^2$, das nach der folgenden Bestimmung errechnet wird:

1) Dies schlägt z.B. Hofstätter vor.

$$Chi^2 = -\left[(N - 1) - \frac{1}{6}\cdot(2V + 5)\right] \ln |A| . \qquad (119)$$

Darin ist N die Anzahl der Untersuchungseinheiten in den zugrundeliegenden Stichproben, V die Anzahl der Variablen und |A| die sog. Determinante der Korrelationsmatrix. Die Zahl der Freiheitsgrade beträgt $0,5\cdot(V^2 - V)$.
In unserem Fall erhalten wir:

$|A| = 0,0000029745$
$\ln |A| = -12,725$
$Chi^2 = -\left[(27 - 1) - \frac{1}{6}(12 + 5)\right]\cdot(-12,725) = 294,796$
$df = 0,5\cdot(36 - 6) = 15.$

Das errechnete $Chi^2$ ist auf dem 0,1%-Niveau signifikant: Der kritische Wert hierfür beträgt bei 15 Freiheitsgraden 37,70.
Für den Fall, daß mit anderen Rechnermodellen gearbeitet wird, schlagen wir ein Schätzverfahren vor:
Man errechne den Z-Wert der mittleren Korrelation für die ganze Matrix (Programme 31 und 32). Dazu ermitteln wir einen kritischen Wert nach der Beziehung

$$\bar{Z}_{r_{crit}} = \frac{z_{p/2}}{\sqrt{2N - V}} , \qquad (120)$$

wobei $z_{p/2}$ jener z-Wert nach Tabelle 1 ist, den wir erhalten, wenn wir die Hälfte des gewünschten Signifikanz-Niveaus von 0,5 abziehen und zu der so ermittelten Fläche den z-Wert aufsuchen (1,96 für das 5%-, 2,58 für das 1%- und 3,29 für das 0,1%-Niveau).
In unserem Falle erhalten wir als Z-Wert der durchschnittlichen Korrelation $\bar{Z}_r = 1,205$.

$$\bar{Z}_{r_{crit(0,1\%)}} = \frac{3,29}{\sqrt{2\cdot 27 - 6}} = 0,475.$$

Mit beiden Verfahren können wir also die Nullhypothese, die Korrelationen der Matrix seien zufallsbedingt, auf dem 0,1%-Niveau zurückweisen.

## 5.3. Extraktion der Faktoren (Pr. 44)

Es kann jetzt mit der Faktorenextraktion begonnen werden: Zunächst bilden wir in jeder Spalte die Summe und addieren die Spaltensummen zu einer Gesamtsumme (25,31) auf. Aus dieser ziehen wir die Quadratwurzel (5,031). Durch den auf diese Weise erhaltenen Wert dividiert man in der Folge alle Spaltensummen und erhält damit die Ladungen des Faktors $a_1$ (siehe oben in der Tabelle). Es ist praktisch, diese Faktorladungen auch rechts an den Rand der Matrix zu schreiben.
Im weiteren Verlauf ziehen wir von jeder Zahl der Ausgangsmatrix das Produkt aus der Ladungszahl der Zeile und der Ladungszahl der Spalte ab. Wir erhalten so die 1. Restkorrelationsmatrix:

| | X | Y | Z | U | V | W |
|---|---|---|---|---|---|---|
| X | (0,27) | -0,43 | 0,27 | -0,03 | 0,08 | -0,19 |
| Y | -0,43 | (0,57) | -0,43 | 0,05 | -0,14 | 0,38 |
| Z | 0,27 | -0,43 | (0,27) | -0,04 | 0,09 | -0,19 |
| U | -0,03 | 0,05 | -0,04 | (-0,01) | 0,01 | 0,00 |
| V | 0,08 | -0,14 | 0,09 | 0,01 | (0,03) | -0,08 |
| W | -0,19 | 0,38 | -0,19 | 0,00 | -0,08 | (0,10) |
| $\sum$ | -0,03 | 0,00 | -0,03 | -0,02 | -0,01 | 0,02 |

Wenn wir richtig gerechnet haben, müssen die Spaltensummen (bis auf kleine Rundungsungenauigkeiten) jeweils Null sein.
Nun schätzen wir zunächst die Restkommunalitäten neu. Wir machen damit im allgemeinen einen geringeren Fehler, als wenn wir mit den errechneten Restkommunalitäten weiterarbeiten. Sodann fällt auf, daß die Korrelationen mit X und Z überwiegend negativ geworden sind. In solchen Fällen nimmt man eine Reflexion vor: Die Vorzeichen aller Korrelationen der Variablen werden umgekehrt (die Kommunalitäten bleiben jedoch stets positiv). Eine Reflexion wird an der entsprechenden Variablen mit * vermerkt. Korrelationen, die mehrfach betroffen sind, wechseln mehrfach das Vorzeichen (hier $r_{XZ}$). Durch die Reflexion von X und Z erhalten so viele Korrelationen mit der Variablen V zusätzlich ein negatives Vorzeichen, daß schließlich auch noch hier eine Reflexion nötig wird. So erhalten wir die nachstehende modifizierte Restkorrelationsmatrix:

| | X* | Y | Z* | U | V* | W | $a_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X* | (0,43) | 0,43 | 0,27 | 0,03 | 0,08 | 0,19 | 0,55 |
| Y | 0,43 | (0,43) | 0,43 | 0,05 | 0,14 | 0,38 | 0,72 |
| Z* | 0,27 | 0,43 | (0,43) | 0,04 | 0,09 | 0,19 | 0,56 |
| U | 0,03 | 0,05 | 0,04 | (0,05) | -0,01 | 0,00 | 0,06 |
| V* | 0,08 | 0,14 | 0,09 | -0,01 | (0,14) | 0,08 | 0,20 |
| W | 0,19 | 0,38 | 0,19 | 0,00 | 0,08 | (0,38) | 0,47 |
| $\sum$ | 1,43 | 1,86 | 1,45 | 0,16 | 0,52 | 1,22 | 6,64 |
| $a_2$ | 0,55 | 0,72 | 0,56 | 0,06 | 0,20 | 0,47 | |

Mit dieser Matrix verfahren wir wie mit der Ausgangsmatrix: Wir ermitteln die Spaltensummen, addieren diese zu einer Gesamtsumme (6,64) auf und ziehen daraus die Quadratwurzel (2,577). Indem wir die Spaltensummen durch diese teilen, erhalten wir die Ladungszahlen von Faktor $a_2$. Daraus kann eine zweite Restkorrelationsmatrix errechnet werden (auf deren Abdruck verzichtet wurde), aus der sich in der aufgezeigten Weise ein dritter Faktor $a_3$ gewinnen läßt.

Hier halten wir zunächst einmal ein und fragen, wann die gesamte Prozedur abgebrochen und eine Matrix als erschöpft angesehen werden darf. Dazu gibt es eine ganze Reihe von Verfahren, die z.T. auch zu verschiedenen Ergebnissen führen. Wir stellen hier nur die Prüfung der sog. Eigenwerte der Faktoren vor. Die Eigenwerte erhalten wir, wenn wir alle Ladungszahlen der Faktoren quadrieren und addieren. Als Abbruchskriterium gilt: Eigenwerte kleiner als 1 zeigen die Un-

brauchbarkeit eines Faktors an. Sobald Faktoren mit solchen Eigenwerten extrahiert werden, darf man die Faktorenanalyse abbrechen. Wir prüfen daraufhin die bisher extrahierten Faktoren (Ladungszahlen reflektierter Variabler erhalten ein negatives Vorzeichen):

| | X | Y | Z | U | V | W | Eigenwert |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,85 | 0,50 | 0,85 | 0,99 | 0,97 | 0,88 | 4,39 |
| $a_2$ | -0,55 | 0,72 | -0,56 | 0,06 | -0,20 | 0,47 | 1,40 |
| $a_3$ | 0,17 | 0,13 | -0,14 | 0,06 | 0,10 | 0,13 | 0,10 |

Es zeigt sich, daß der dritte Faktor bereits bedeutungslos ist.
Als nächstes überprüfen wir unsere Schätzung der Kommunalitäten: Wir stellen den Schätzwerten errechnete Werte gegenüber, die wir erhalten, wenn wir jeweils die Ladungszahlen jeder Variablen mit den relevanten Faktoren quadrieren und addieren. Wir erhalten:

| | X | Y | Z | U | V | W |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,85 | 0,50 | 0,85 | 0,99 | 0,97 | 0,88 |
| $a_2$ | -0,55 | 0,72 | -0,56 | 0,06 | -0,20 | 0,47 |
| $h^2_{errechnet}$ | 1,03 | 0,77 | 1,04 | 0,98 | 0,98 | 1,00 |
| $h^2_{geschätzt}$ | 0,99 | 0,82 | 0,99 | 0,97 | 0,97 | 0,87 |
| $Z^2_{h(errechnet)}$ | 2,65 | 1,02 | 2,65 | 2,30 | 2,30 | 2,65 |
| $Z^2_{h(geschätzt)}$ | 2,65 | 1,16 | 2,65 | 2,09 | 2,09 | 1,33 |
| Differenz | 0,00 | -0,14 | 0,00 | 0,21 | 0,21 | 1,32 |

Wir betrachten die Kommunalitäten nun als Korrelationen und nehmen nach (88) Fishersche Z-Transformationen vor. (Vgl. dazu auch Tab. 10.) Daraus errechnen wir die Differenzen $Z^2_{h\,err} - Z^2_{h\,gesch}$. An der größten dieser Differenzen prüfen wir die Nullhypothese, daß diese Differenzen als zufällig gelten können, mit folgenden Test:

$$CR = \frac{\Delta Z_{max}}{\sqrt{\frac{2}{N-3}}} . \qquad (121)$$

Für $\Delta Z_{max} = 1,32$ und $N = 27$ rechnen wir:

$$CR = \frac{1,32}{\sqrt{\frac{2}{27-3}}} = 4,67.$$

Der Wert nach (121) ist z-verteilt. Nach Tabelle 1 hat ein z-Wert von 4,57 eine Wahrscheinlichkeit von $p < 0,1\%$. Das bedeutet, daß die Unterschiede zwischen den geschätzten und den errechneten Kommunalitäten keineswegs zufällig sind und nicht vernachlässigt werden dürfen. Die gesamte bisher abgewickelte Prozedur ist mit den errechneten Kommunalitäten von vorne zu beginnen (wobei selbst-

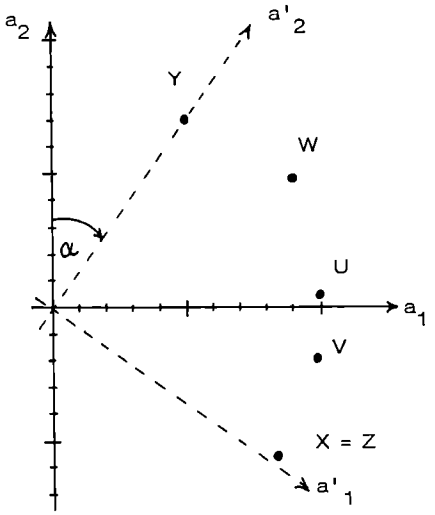
verständlich nur maximale Kommunalitäten von 1,00 eingesetzt werden dürfen).[1] Dieser ungünstige Fall wird natürlich längst nicht immer bei der Durchführung einer Faktorenanalyse eintreten.

Als korrigierte Werte ergeben sich:

| | X | Y | Z | U | V | W |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,84 | 0,49 | 0,84 | 0,99 | 0,97 | 0,91 |
| $a_2$ | -0,56 | 0,70 | -0,56 | 0,04 | -0,19 | 0,48 |

## 5.4. Rotation der Faktoren (Pr. 45)

Um uns die Interpretation zu erleichtern, stellen wir die Lage der Variablen graphisch dar, wobei wir die beiden Faktoren als Koordinaten ($a_1$ = X-Achse, $a_2$ = Y-Achse) verwenden:




Es erleichtert die Interpretation im allgemeinen sehr, wenn
- möglichst alle Variablen im positiven Quadranten liegen,
- möglichst viele Variablen mit wenigstens einem Faktor mit Null oder doch sehr gering laden.

Man kann diese Verhältnisse oft durch eine geschickte Drehung des Achsenkreuzes (der sog. Zentroidfaktoren) herbeiführen. In unserem Beispiel würde sich etwa eine Rotation der Faktoren in der Weise empfehlen, daß Y auf $a_2$ zu liegen kommt.

Soll die neue Achse durch einen bestimmten Punkt verlaufen, so läßt sich der Rotationswinkel berechnen nach

$$\tan \alpha = \frac{a_1}{a_2}. \qquad (122)$$

1) Die theoretisch nicht möglichen Werte über 1,00 ergeben sich aufgrund der anfänglichen Schätzfehler.

Die neuen Ladungszahlen ergeben sich dann nach:

$$a'_1 = a_1 \cos\alpha - a_2 \sin\alpha \qquad (123)$$

$$a'_2 = a_1 \sin\alpha + a_2 \cos\alpha . \qquad (124)$$

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$\tan\alpha = \frac{0,49}{0,70} = 0,70; \quad \alpha = \arctan 0,70 = 34,99^\circ.$$

Als neue Ladungszahlen der rotierten Faktoren erhalten wir nach (123) und (124):

| | X | Y | Z | U | V | W | Varianzaufkl. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1,00 | 0,00 | 1,00 | 0,79 | 0,90 | 0,47 | 0,609 |
| $a_2$ | 0,02 | 0,85 | 0,02 | 0,60 | 0,40 | 0,92 | 0,348 |

Die Varianzaufklärung eines Faktors wird berechnet nach der Beziehung:

$$VA = \frac{\sum_{i=1}^{v} a_i^2}{V}$$

(wobei a = die Ladungszahlen des betr. Faktors und V = die Zahl der Variablen).

In unserem Beispiel erklären die beiden Faktoren zusammen 60,9% + 34,8% = 95,7% der Gesamtvarianz, d.h. das Datenmaterial läßt sich praktisch vollständig aus den beiden ermittelten Faktoren interpretieren.
Es liegt nun nahe, den Faktor $a_1'$ als Länge, den Faktor $a_2'$ als Durchmesser zu bezeichnen. Durchmesser (X) und Grundfläche (Z) laden nicht mit der Länge, d.h. sind nicht von ihr abhängig, während die Länge nicht mit dem Durchmesser lädt. Mantel, Rauminhalt und Raumdiagonale laden mit beiden Faktoren, d.h. sie sind von Durchmesser und Länge abhängig, außerdem ist die Länge (Y) von sich selbst abhängig. Von den Berechnungsvorschriften für Grundfläche, Mantel, Rauminhalt und Raumdiagonale her ist plausibel, daß dies so sein muß, auch daß die Zahl der Faktoren gerade zwei beträgt. Man könnte sich allerdings fragen, warum sich für die gesamte Varianzaufklärung nicht 100% ergeben. Dabei ist zu bedenken, daß die Produktmomentkorrelation und ebenfalls die auf ihr aufbauende Faktorenanalyse nur lineare Zusammenhänge erfaßt, während die Zusammenhänge in unserem Beispiel z.T. auch quadratischer Art sind.
Während die Benennung der beiden Faktoren in unserem Beispiel keine Schwierigkeiten macht, weil wir wissen, was wir zu Beginn in die Faktorenanalyse eingebracht haben, ist sie in der Forschungspraxis oft sehr schwierig. Es kann nicht scharf genug vor voreiligen Verbalisierungen gewarnt werden: Die Faktoren sind zunächst einmal rechnerische Artefakte, die darum, weil sie "herauskommen", noch kein Pendant in der Wirklichkeit haben müssen. Oft ist eine solche Verbalisierung auch gar nicht nötig. Es genügt, die Zahl der Faktoren und das Verhältnis der einzelnen Variablen zu ihnen zu interpretieren.
Den Leser mag es befremdet haben, daß die ursprünglich ermittelten Zentroidfaktoren offenbar nach Belieben rotiert werden dürfen, um sie für eine Interpretation "passend" zu machen. Allerdings ist strenggenommen die Entscheidung, nicht zu rotieren, auch eine Entscheidung über Rotation: Es wird dann eben mit Null Grad rotiert. Wer keine Rotation vornimmt, verfährt darum nicht unbedingt redlicher und exakter, sondern zunächst einmal nur bequemer. Das muß natür-

lich nicht heißen, daß die Unterlassung einer Rotation nach reiflicher Überlegung nicht auch einmal ratsam sein kann, wenn die Merkmale bereits zu den Zentroid-Faktoren günstig liegen. Auch ist es irrig zu glauben, in einer Rotation werde alles verändert. Die Lage der Variablen zueinander in dem durch die Faktoren aufgespannten Raum bleibt nämlich unberührt, und in ihrer zahlenmäßigen Fixierung haben wir das eigentliche, "exakte" Ergebnis einer Faktorenanalyse zu sehen.
Falls wir mehr als 2 Faktoren erhalten haben, müssen wir entsprechend mehr Zeichnungen für die Interpretation anfertigen, im Falle von 4 Faktoren sind dies bereits 6, wobei in jeder Zeichnung 2 Faktoren kombiniert und die Variablen als Punkte eingetragen werden:

| | |
|---|---|
| 1 - 2 | 2 - 3 |
| 1 - 3 | 2 - 4 |
| 1 - 4 | 3 - 4 |

Allerdings sind keine 6 Rotationen sinnvoll, da sonst einige Rotationen das wiederum rückgängig machen würden, was durch andere bewirkt wurde. Im Falle von 4 Faktoren genügen 2 Rotationen (1 - 2 und 3 - 4), um alle Faktoren günstig zu legen. Allenfalls würde man prüfen, ob noch eine Rotation von 2 - 3 sinnvoll ist.
Wir sehen, daß sowohl die Interpretation als auch die optimale Rotation von Faktoren mit wachsender Faktorzahl rasch sehr komplex wird, so daß man sich in der Forschungspraxis meistens der Unterstützung durch eine EDV-Anlage versichern muß.

# 6. Varianzanalytische Methoden

## 6.1. Varianzanalyse mit unabhängigen Stichproben

Obwohl wir mit Hilfe des Programms 11 den Arbeitsaufwand, der beim Vergleich einer größeren Zahl von Mittelwerten durch den t-Test entsteht, in Grenzen halten können, wird sein Einsatz oberhalb einer gewissen Grenze doch wieder aufwendig. Und was noch bedeutsamer ist: Mit der Zahl der durchgeführten t-Tests wächst auch das Risiko, daß einer oder mehrere dieser Tests nur zufällig signifikant sind. Ein Verfahren, das uns zugleich gestattet, diese erhöhte Irrtumswahrscheinlichkeit zu vermeiden und rationeller zu arbeiten, ist die Varianzanalyse.

### 6.1.1. Die einfaktorielle Varianzanalyse (Pr. 46)

Im Rahmen einer Varianzanalyse berechnet man die Quadratsummen für die Varianzen zwischen den verschiedenen Untersuchungsgruppen (für die sog. "Treatment-Stufen"), eine Fehlervarianz-Quadratsumme und die Quadratsumme für die Gesamtvarianz.
Quadratsumme heißt der Zähler der bekannten Formel für die Berechnung einer Varianz

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2}{N - 1},$$

so daß gilt

$$QS \text{ (=Quadratsumme)} = \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})^2. \qquad (126)$$

Für die Berechnung der genannten Quadratsummen gelten folgende Beziehungen:

$$QS_{total} = \sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}^2\right) - \frac{\left[\sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)\right]^2}{N}; \quad df = N - 1; \qquad (127)$$

$$QS_{treatment} = \sum_{i=1}^{c} \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)^2}{n} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{c} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\right)\right]^2}{N}; \quad df = c = 1;$$

$$QS_{Fehler} = QS_{total} - QS_{treatment}; \quad df = N - c,$$

wobei N = Gesamtzahl aller in den verschiedenen Stichproben berücksichtigten Fälle,
n = Anzahl der Fälle in einer Stichprobe,
c = Anzahl der Stichproben (= Treatment-Stufen).

Für die Berechnung der Varianzen aus den Quadratsummen gilt dann folgende Beziehung:

$$\text{Varianz} = \frac{\text{Quadratsumme}}{\text{Freiheitsgrade}}. \qquad (128)$$

Um zu prüfen, ob die in Frage stehenden Mittelwertunterschiede signifikant sind, bildet man den Quotienten:

$$F = \frac{V_{treatment}}{V_{Fehler}}; \qquad df_{Zähler} = c - 1, \quad df_{Nenner} = N - c \tag{129}$$

und sieht in Tabelle 4 den entsprechenden kritischen Wert nach.

Angenommen, wir möchten den durchschnittlichen Stundenlohn in 8 Berufsgruppen vergleichen:

| | Gr.1 | Gr.2 | Gr.3 | Gr.4 | Gr.5 | Gr.6 | Gr.7 | Gr.8 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sum X$ | 522 | 457 | 381 | 421 | 198 | 765 | 583 | 394 | 3721 |
| $\sum X^2$ | 4012 | 4784 | 3593 | 4645 | 987 | 15306 | 5120 | 3946 | 42393 |
| $\bar{X}$ | 12,14 | 12,03 | 7,06 | 8,96 | 6,19 | 17,39 | 9,72 | 7,73 | |
| n | 43 | 38 | 54 | 47 | 32 | 44 | 60 | 51 | 369 |

Bei 8 Vergleichsgruppen hätten wir 28 t-Tests durchzuführen, von der Erniedrigung des Verläßlichkeitsniveaus ganz abgesehen. Im Rahmen einer Varianzanalyse brauchen wir lediglich zu rechnen:

$$QS_{total} = 42393 - \frac{(3721)^2}{369} = 4870{,}40;$$

$$QS_{treatment} = \frac{522^2}{43} + \frac{457^2}{38} + \frac{381^2}{54} + \frac{421^2}{47} + \frac{198^2}{32} + \frac{765^2}{44} + \frac{583^2}{60} + \frac{394^2}{51} - \frac{3721^2}{369} =$$

$$= 4003{,}86;$$

$$QS_{Fehler} = 4870{,}40 - 4003{,}86 = 866{,}54.$$

Aus diesen Werten bilden wir nun unter Berücksichtigung der zugehörigen Freiheitsgrade den Quotienten für F:

$$F = \frac{4003{,}86 : (8 - 1)}{866{,}54 : (369 - 8)} = 238{,}33.$$

In Tabelle 4 finden wir für 7 Freiheitsgrade (in der Horizontalen) und für 361 Freiheitsgrade (in der Vertikalen) einen kritischen Wert von 2,64 für das 1%-Niveau. Die mittleren Einkommensunterschiede zwischen den 8 Gruppen sind somit außerordentlich signifikant.

Die Ergebnisse einer Varianzanalyse erlauben uns außerdem, zu beurteilen, in welchem Ausmaß die Unterschiedlichkeit der vorgefundenen Werte (die Varianz) aus den Treatment-Stufen erklärt werden kann. M.a.W.: Sie ermöglicht die Bestimmung desjenigen Varianzanteils der abhängigen Variablen (hier: Löhne), der durch die unabhängige Variable (hier: Berufszugehörigkeit) erklärt wird. Die sog. Varianzaufklärung (= VA) wird in Prozenten nach der Beziehung

$$VA = \frac{QS_{treatment}}{QS_{total}} \cdot 100\% \tag{130}$$

berechnet. Für unser obiges Beispiel ergibt sich:

$$VA = \frac{4003,86}{4870,40} \cdot 100\% = 82,21\%.$$

D.h. die Unterschiedlichkeit der Durchschnittslöhne läßt sich zu 82,21% aus der Berufsgruppenzugehörigkeit erklären. Die restlichen 17,79% werden durch andere (unbekannte) Faktoren und/oder Meßfehler bestimmt.
Aus der VA kann über die Formel

$$r = \sqrt{\frac{VA}{100}} = \sqrt{\frac{QS_{treat}}{QS_{tot}}} \qquad (131)$$

ein Korrelationskoeffizient berechnet werden. In unserem Falle ermitteln wir:

$$r = \sqrt{\frac{4003,86}{4870,40}} = 0,907.$$

Dieser Korrelationskoeffizient kann nur Werte zwischen 0 und +1,0 annehmen.

Die Signifikanzprüfung für den F-Quotienten liefert nur einen allgemeinen Hinweis, ob die untersuchten Mittelwerte sich insgesamt in irgendeiner Hinsicht unterscheiden. Zum Zwecke einer differenzierten Interpretation ist es aber nötig zu wissen, welche Mittelwerte sich im einzelnen signifikant unterscheiden und welche nicht. Dazu müssen entsprechende Einzelvergleiche durchgeführt werden. Allgemein sind bei c verglichenen Gruppen $\binom{c}{2} = \frac{c(c-1)}{2}$ Einzelvergleiche möglich. In unserem Beispiel wären dies $\frac{8\,(8-1)}{2} = 28$ Einzelvergleiche. Nun taucht aber mit der Durchführung solcher Einzelvergleiche sofort wieder das Problem auf, daß mit zunehmender Anzahl der Einzelvergleiche auch die Wahrscheinlichkeit wächst, daß einer oder mehrere dieser Vergleiche nur zufällig signifikant ausfällt. Um dies zu vermeiden, können wir zweierlei tun:

- Man sollte so wenig Einzelvergleiche wie möglich durchführen. Am sinnvollsten ist es, vor der Untersuchung gezielte Hypothesen aufzustellen und diese dann zu prüfen,anstatt alle Unterschiede abzutesten.
- Liegen keine solchen a priori aufgestellten Hypothesen vor (und in der Praxis ist dies der häufigere Fall), besteht die Möglichkeit, die Verringerung der Signifikanz-Niveaus durch den sog. Scheffé-Test wieder auszugleichen. Wir berechnen dann eine "kritische Differenz" (= $Diff_{krit}$) nach der Beziehung:

$$Diff_{krit} = \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left(c - 1\right) V_{Fehler} \cdot F_{c-1,N-c/100\%-p\%}} \; ; \qquad (132)$$

darin ist $n_1$ = Umfang der einen der beiden verglichenen Stichproben,
$n_2$ = Umfang der anderen der beiden vergl. Stichproben,
$c$ = Gesamtzahl der Stichproben,
$F_{c-1,N-c/100\%-p\%}$ = F-Wert nach Tabelle 4 für c-1 Zähler- und N-c Nenner-Freiheitsgrade auf einem Niveau, welches 100%-p% beträgt, wobei p% das gewünschte Signifikanz-Niveau ist.

In unserem Beispiel würden wir auf dem 1%-Niveau für den Unterschied zwischen den Berufsgruppen 7 und 8 zu rechnen haben:

$$Diff_{krit} = \sqrt{\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{51}\right)\left(8-1\right)\frac{866,54}{369-8}} \cdot 2,64 = 1,27.$$

Die tatsächliche mittlere Einkommensdifferenz beträgt 9,72 - 7,73 = 1,99. Sie liegt über der kritischen Differenz für das 1%-Niveau, ist also sehr signifikant.
Es ist durchaus möglich, daß trotz einer insgesamt durchaus vorhandenen Signifikanz einer Varianzanalyse keiner der Einzelvergleiche signifikant ist.
Für die Zerlegung der totalen Quadratsumme in die Treatment- und Fehler-Quadratsumme sowie für die Überprüfung von Einzelvergleichen bedarf es keiner besonderen Voraussetzungen. JEDOCH IST FÜR DIE ANWENDUNG DES F-TESTS VORAUSSETZUNG, DASS DIE GRUNDGESAMTHEITEN, AUS DENEN DIE STICHPROBEN STAMMEN, NORMALVERTEILT UND DIE VARIANZEN GLEICH SIND SOWIE DASS DIE EINZELNEN FEHLERKOMPONENTEN VONEINANDER UNABHÄNGIG SIND.
Die Normalverteiltheit wird in der Praxis nur selten eigens kontrolliert, obgleich dies mittels der Normalitätsprüfung ohne weiteres möglich wäre. Die übrigen Voraussetzungen prüft man gewöhnlich mit dem sog. Bartlett-Test. Es wird ein $Chi^2$ nach der Formel

$$Chi^2 = \frac{2,303}{1 + \frac{1}{3(c-1)}\left(\sum_{i=1}^{c}\frac{1}{n-1} - \frac{1}{N-c}\right)}\left[(N-c)\log\frac{\sum_{i=1}^{c} V_{Fehler_i} \cdot n}{N} - \sum_{i=1}^{c}(n-1)\log V_{Fehler_i}\right] \quad \text{(bei df = c-1)} \qquad (133)$$

(Pr.50)

berechnet. Dabei ist c = Anzahl der Stichproben,
N = Gesamtumfang aller Stichproben,
n = Umfänge der einzelnen Stichproben,
$V_{Fehler_i}$ = einzelne Fehlervarianz.

Die einzelnen Fehlervarianzen werden nach der Formel:

$$V_{Fehler_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{n}}{n-1} \qquad (134)$$

(Pr. 1)

berechnet.
Wir führen die Berechnung anhand folgender Ausgangsdaten vor:

| Stichproben | n | $\sum X$ | $\sum X^2$ | $V_{Fehler_i}$ | $V_{Fehler} \cdot n$ | $\log V_{Fehler_i}$ | $(n-1)\log V_{Fehler_i}$ | $\frac{1}{n-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 71 | 767 | 25,86 | 232,75 | 1,41 | 11,30 | 0,125 |
| 2 | 13 | 264 | 5868 | 42,23 | 549,00 | 1,63 | 19,51 | 0,083 |
| 3 | 6 | 22 | 114 | 6,67 | 40,00 | 0,82 | 4,12 | 0,200 |
| N=28 | | | | 74,76 | 821,75 | | 34,93 | 0,408 |

$$Chi^2 = \frac{2,303}{1 + \frac{1}{3(3-1)} \cdot \left(0,408 - \frac{1}{28-3}\right)} \cdot \left[(28-3)\log\frac{821,75}{28} - 34,93\right] = 3,82.$$

Da der kritische Wert für ein $Chi^2$ mit 3 - 1 = 2 Freiheitsgraden auf dem 5%-Niveau 5,99 beträgt, ist das ermittelte $Chi^2$ nicht signifikant, was bedeutet, daß die Varianzen der drei Stichproben nicht in einem Ausmaß inhomogen sind, das die Anwendung des F-Tests verbieten würde.
Sind die Stichproben gleich groß, dann läßt sich der wesentlich weniger aufwendige $F_{max}$-Test durchführen:
Wir bilden dann einfach den Quotienten aus der größten und der kleinsten Varianz:

$$F_{max} = \frac{V_{Fehler_{i(max)}}}{V_{Fehler_{i(min)}}} . \qquad (135)$$

Dieser Wert wird anhand einer besonderen Tabelle, Tabelle 13, auf seine Signifikanz überprüft. Für die Höhe des kritischen Wertes sind neben der Anzahl der Stichproben c die Freiheitsgrade (jeder!) der Fehlervarianzen (df = n - 1) maßgeblich.
Bei den vorliegenden Werten:

| Gruppe | n | $\sum X$ | $\sum X^2$ | $V_{Fehler\ i}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 78 | 806 | 20,800 $= V_{min}$ |
| 2 | 30 | 96 | 1851 | 53,234 |
| 3 | 30 | 65 | 837 | 24,006 |
| 4 | 30 | 115 | 2182 | 60,040 $= V_{max}$ |

$$F_{max} = \frac{60,040}{20,800} = 2,887.$$

Bei c = 4 und df = 30 - 1 = 29 ist dieser Wert, legen wir das 1%-Niveau zugrunde, nach Tabelle 13 nicht signifikant: Der kritische Wert würde rund 3,3 betragen.
Es kann also davon ausgegangen werden, daß die Varianzen hinreichend homogen sind.
Insgesamt ist die Varianzanalyse relativ robust gegen eine Verletzung ihrer Voraussetzungen, d.h. sie führt auch dann noch zu hinreichend richtigen Ergebnissen, wenn die Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Im allgemeinen kann sowohl der Bartlett-Test als auch der $F_{max}$-Test entfallen, wenn die Stichproben jeweils größer als 15 sind. Besonders günstige Verhältnisse liegen vor, wenn sie außerdem gleich groß sind.

### 6.1.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse (Pr. 47)

Oft werden wir daran interessiert sein, die Wirkungsweise mehrerer Faktoren zu untersuchen. In solchen Fällen können Verfahren der mehrfaktoriellen Varianzanalyse mit Vorteil angewandt werden.
In der zweifaktoriellen Varianzanalyse wird die Wirkung zweier unabhängiger Variablen auf eine abhängige analysiert. Im Falle gleich großer Stichproben pflegt man zum Zwecke einer einfacheren Darstellung des Rechengangs die nachstehenden Kennziffern zu definieren:

$$(1) = \frac{(\sum X)^2}{p \cdot q \cdot n} ; \qquad n = \text{Umfang jeder einzelnen der (gleichgroßen) Stichproben;} \qquad (136)$$

(2) $= \sum x^2$ (Summe der Quadrate aller Meßwerte über alle Gruppen hinweg);

(3) $= \dfrac{I,1^2 + I,2^2 + \ldots I,p^2}{q \cdot n}$ ;

(4) $= \dfrac{II,1^2 + II,2^2 + \ldots II,q^2}{p \cdot n}$ ;

(5) $= \dfrac{\sum Z_1^2 + \sum Z_2^2 + \ldots \sum Z_{pq}^2}{n}$ .

Zugrunde liegt ein Datenschema nach folgendem Muster:

| | | Faktor I<br>Treatmentstufen | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | ... | p | $\sum$ |
| Faktor II | Treat 1 | $\sum Z_1$ | $\sum Z_2$ | $\sum Z_{\ldots}$ | $\sum Z_p$ | II,1 |
| | ment- 2 | $\sum Z_{1+p}$ | $\sum Z_{2+p}$ | $\sum Z_{\ldots}$ | $\sum Z_{2p}$ | II,2 |
| | stu- | | | | | |
| | q fen | $\sum Z_{pq-p+1}$ | $\sum Z_{pq-p+2}$ | | $\sum Z_{pq}$ | II,q |
| | $\sum$ | I,1 | I,2 | ... | I,p | $\sum x$ |

Die Quadratsummen (QS) werden dann nach folgenden Beziehungen ermittelt:

$$QS_{treat}{}^{I} = (3) - (1) \; ; \quad df = p - 1; \tag{137}$$

$$QS_{treat}{}^{II} = (4) - (1) \; ; \quad df = q - 1;$$

$$QS_{I \times II} = (5) - (3) - (4) + (1); \; df = (p - 1) \cdot (q - 1) \; ;$$

$$QS_{Fehler} = (2) - (5) \; ; \quad df = pq \cdot (n - 1) \; ;$$

$$QS_{total} = (2) - (1); \quad df = pqn - 1.$$

Die $QS_{I \times II}$ gibt die Beeinflussung der abhängigen Variablen durch die Wechselwirkung der beiden unabhängigen Varaiblen I und II wieder. Durch Division der Quadratsummen durch die jeweiligen Freiheitsgrade ermittelt r ·n die zugehörigen Varianzen. Zur Überprüfung der Varianzen der Faktoren I d II sowie ihrer Interaktion I x II bilden wir jeweils einen F-Bruch, in desser. ähler die zu prüfende Varianz und in dessen Nenner die $Varianz_{Fehler}$ steht. Für die Varianzaufklärung wird wie bei einer einfaktoriellen Varianzanalyse gerechnet:

$$VA = \frac{QS}{QS_{tot}} \cdot 100\%. \qquad (130)$$

Die beschriebene Berechnung der Varianzen ist nur dann zulässig, wenn die Stufen der geprüften Faktoren systematisch (und nicht zufällig) ausgewählt sind. Der Statistiker sagt: bei "festen Effekten".
Für den Paarvergleich einzelner Treatmentstufen gelten folgende Modifikationen des Scheffé-Tests:

$$Diff_{crit}I = \sqrt{\frac{2(p-1)\ V_{Fehler} \cdot F_{p-1,df(Fehler)/100\%-p\%}}{n \cdot q}}\ ; \qquad (138)$$

$$Diff_{crit}II = \sqrt{\frac{2(q-1)\ V_{Fehler}\ F_{q-1,df(Fehler)/100\%-p\%}}{n \cdot p}}\ ;$$

$$Diff_{crit}I \times II = \sqrt{\frac{2(p-1)(q-1)V_{Fehler} \cdot F_{(p-1)(q-1),p \cdot q \cdot (n-1)\ \ 100\%-p\%}}{n}}\ .$$

Auch diese Formeln dürfen nur angewendet werden, wenn die Stufen der beiden Faktoren systematisch ausgewählt sind.
Nachfolgend soll der Einfluß dreier verschiedener Unterrichtsfilme auf die reproduzierte Anzahl der Wissenselemente unter 4 verschiedenen Testbedingungen (unterschiedliche Dauer der verfügbaren Zeit für die Reproduktionen) untersucht werden. Es werden dazu 4 mal 3 = 12 Stichproben benötigt. Sie mögen je 5 Personen umfassen, und die ermittelten Daten seien die folgenden:

| | | TESTZEIT (FAKTOR I) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 30Min. | 40 Min. | 50 Min. | 60 Min. | $\sum$ |
| Unterrichtsfilme (Faktor II) | Film 1 | 5 | 6 | 6 | 4 | |
| | | 3 | 3 | 6 | 5 | |
| | | 4 | 5 | 4 | 5 | |
| | | 2 | 2 | 4 | 6 | |
| | | 2 | 3 | 4 | 6 | |
| | | 16 | 19 | 24 | 26 | 85 |
| | Film 2 | 1 | 4 | 5 | 3 | |
| | | 2 | 3 | 2 | 4 | |
| | | 3 | 3 | 3 | 4 | |
| | | 3 | 2 | 3 | 3 | |
| | | 4 | 4 | 3 | 3 | |
| | | 13 | 16 | 16 | 17 | 62 |
| | Film 3 | 3 | 3 | 2 | 6 | |
| | | 2 | 3 | 6 | 5 | |
| | | 2 | 4 | 5 | 4 | |
| | | 3 | 4 | 4 | 4 | |
| | | 3 | 4 | 5 | 4 | |
| | | 13 | 18 | 22 | 23 | 76 |
| | $\sum$ | 42 | 53 | 62 | 66 | 223 |

$$(1) = \frac{223^2}{4 \cdot 3 \cdot 5} = 828{,}817;$$

$$(2) = 5^2+3^2+4^2+2^2+2^2+6^2+3^2+5^2+2^2+3^2+\ldots 6^2+5^2+4^2+4^2+4^2 = 923{,}00;$$

$$(3) = \frac{42^2+53^2+62^2+66^2}{3 \cdot 5} = 851{,}533;$$

$$(4) = \frac{85^2+62^2+76^2}{4 \cdot 5} = 842{,}250;$$

$$(5) = \frac{16^2+19^2+24^2+26^2+13^2+16^2+16^2+17^2+13^2+18^2+22^2+23^2}{5} = 869{,}000;$$

$$QS_{I} = 851{,}533 - 828{,}817 = 22{,}716; \quad V_{I} = \frac{22{,}716}{4-1} = 7{,}572;$$

$$QS_{II} = 842{,}250 - 828{,}817 = 13{,}433; \quad V_{II} = \frac{13{,}433}{3-1} = 6{,}717;$$

$$QS_{I \times II} = 869{,}00 - 851{,}533 - 842{,}250 + 828{,}817 = 4{,}034; \quad V_{I \times II} = \frac{4{,}034}{(4-1)\cdot(3-1)} = 0{,}672;$$

$$QS_{Fehler} = 923{,}000 - 869{,}000 = 54{,}000; \quad V_{Fehler} = \frac{54}{3 \cdot 4 \cdot (5-1)} = 1{,}125;$$

$QS_{total} = 923{,}000 - 828{,}817 = 94{,}183.$

Varianzaufklärung:

$$VA_{I} = \frac{22{,}716}{94{,}183} \cdot 100 = 24{,}119\ \%;$$

$$VA_{II} = \frac{13{,}433}{94{,}183} \cdot 100 = 14{,}263\ \%;$$

$$VA_{I \times II} = \frac{4{,}034}{94{,}183} \cdot 100 = 4{,}283\ \%;$$

$$VA_{Fehler} = \frac{54{,}000}{94{,}183} \cdot 100 = 57{,}335.$$

F-Brüche:

$$F_{I} = \frac{7{,}752}{1{,}125} = 6{,}731; \quad \text{bei } df_{Zähler} = 3 \text{ und } df_{Nenner} = 48;$$

$$F_{II} = \frac{6{,}717}{1{,}125} = 5{,}971; \quad \text{bei } df_{Zähler} = 2 \text{ und } df_{Nenner} = 48;$$

$$F_{I \times II} = \frac{0{,}672}{1{,}125} = 0{,}597; \quad \text{bei } df_{Zähler} = 6 \text{ und } df_{Nenner} = 48.$$

Es zeigt sich also, daß beide Faktoren, Testzeit und Unterrichtsfilme, hingegen nicht ihre Interaktion, die Varianz der Meßwerte sehr signifikant beeinflussen. Dabei trägt der Faktor "Testzeit" am meisten, der Faktor "Unterrichtsfilme" etwas mehr als die Hälfte davon und das je spezifische Zusammenwirken von Testzeit und Art des Unterrichtsfilms nur ca. ein Sechstel davon zur Varianzaufklärung bei; mehr als die Hälfte der gesamten Varianz wird von anderen bzw. von Störfaktoren beeinflußt.
Nach dem Scheffé-Test berechnen wir folgende kritische Differenz für Faktor II:

$$Diff_{crit}\,II = \sqrt{\frac{2(3-1) \cdot 1{,}125 \cdot 5{,}08}{5 \cdot 4}} = 1{,}069; \quad (\text{für } p = 1\%).$$

Die Differenz der Mittelwerte von Film I und Film II beträgt $\frac{85}{20} - \frac{62}{20} =$ 1,15. Sie ist größer als der entsprechende kritische Wert von 1,069 und damit sehr signifikant.

### 6.1.3. Varianzanalysen mit ungleichen Stichprobengrößen

Bisher wurde bei der 2-faktoriellen Varianz-Analyse vorausgesetzt, daß die verschiedenen Stichproben gleich groß sind.
Nun kann es selbstverständlich vorkommen, daß diese Bedingung in der Praxis nicht erfüllt werden kann. Von den geläufigen Verfahren, diesen Mangel rechnerisch auszugleichen, greifen wir nur die zwei einfachsten heraus:

Denkbar ist z.B., daß die Populationen mit unterschiedlichen Faktorstufen-Kombinationen so verschieden groß sind, daß eine Zusammenstellung gleich großer

Stichproben einfach nicht zu leisten ist. In diesem Falle sollte man wenigstens darauf achten, daß sie sich proportional zueinander verhalten. In dem nachstehenden Beispiel verhalten sich die Zeilensummen jeweils wie 1:2:1:3:2 und die Spaltensummen wie 1:3:2 :

| | | Faktor I | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Faktor II | 1 | 5 | 10 | 5 | 15 | 10 |
| | 2 | 15 | 30 | 15 | 45 | 30 |
| | 3 | 10 | 20 | 10 | 30 | 20 |

Liegen so geartete Verhältnisse vor, können wir einen sogenannten PROPORTIONALITÄTSAUSGLEICH vornehmen. Dazu müssen die Kennziffern für die 2-faktorielle Varianzanalyse folgendermaßen korrigiert werden:

$$(1') = \frac{(\sum x)^2}{\sum_{i=1}^{c} n_i} \qquad (139)$$

$$(2') = (2) = \sum_{i=1}^{c \cdot n} x^2_i$$

$$(3') = \frac{I,1^2}{n_{I,1}} + \frac{I,2^2}{n_{I,2}} + \dots \frac{I,p^2}{n_{I,p}}$$ (wobei $n_{I,1}$ = Anzahl der Probanden auf der Treatmentstufe I,1 usw.);

$$(4') = \frac{II,1^2}{n_{II,1}} + \frac{II,2^2}{n_{II,2}} + \dots \frac{II,q^2}{n_{II,q}}$$ (wobei $n_{II,1}$ = Anzahl der Probanden auf der Treatmentstufe II,1 usw.);

$$(5') = \frac{\sum Z_1^2}{n_1} + \frac{\sum Z_2^2}{n_2} + \dots \frac{\sum Z_{pq}^2}{n_{pq}}$$ (wobei $n_1$ = Anzahl der Probanden in der 1. Stichprobe bzw. Zelle usw.).

Die Berechnung der Quadratsummen kann dann wie oben aufgezeigt erfolgen. Dabei ist df für die $QS_{Fehler} = \sum_{i=1}^{c} n - p \cdot q$.
Nicht selten kommt es auch vor, daß zwar gleich große Stichproben gewählt waren, daß bei der Durchführung der Untersuchung jedoch einzelne Versuchspersonen ausfallen und nachher nicht mehr zu gleichen Testbedingungen in die Untersuchung einbezogen werden können. In solchen Fällen pflegen die Stichprobengrößen nicht sehr stark voneinander abzuweichen. Ist die kleinste Stichprobe nicht um einen Betrag von mehr als 20% kleiner als die größte, so können wir eine KORREKTUR DURCH DIE BERECHNUNG EINES HARMONISCHEN MITTELS FÜR DIE STICHPROBENGRÖSSEN herbeiführen.
Das harmonische Mittel ist für die 2-faktorielle Varianzanalyse

$$HM_n = \frac{p \cdot q}{\sum_{i=1}^{c} \frac{1}{n_i}}. \qquad (140)$$

Zunächst werden in einem solchen Fall in den einzelnen Zellen der Daten-Matrix bzw. Daten-Matrizen anstelle der Summen die arithmetischen Mittelwerte berechnet.

Für die 2-faktorielle Varianzanalyse ermittelt man dann folgende Kennziffern:

$$(1'') = \frac{\left(\sum_{i=1}^{c} \bar{Z}_i\right)^2}{p \cdot q}, \qquad \text{wobei } \bar{Z} = \text{arith. Mittel in einer Zelle;} \tag{141}$$

$$(3'') = \frac{\bar{Z}^2_{I,1} + \bar{Z}^2_{I,2} + \ldots \bar{Z}^2_{I,p}}{q}, \qquad \text{wobei } \bar{Z}_{I,1} = \text{Summe aller Zellenmittelwerte der Faktorstufe I, 1 usw.;}$$

$$(4'') = \frac{\bar{Z}^2_{II,1} + \bar{Z}^2_{II,2} + \ldots \bar{Z}^2_{I,q}}{p};$$

$$(5'') = \sum_{i=1}^{c} \bar{Z}_i^2.$$

Die Kennziffer 2 kann in diesem Falle nicht auf die übliche Weise berechnet werden. Das hat zur Folge, daß die $QS_{Fehler}$, zu deren Ermittlung 2 sonst eingesetzt wird, aus den Daten der einzelnen Zellen gesondert errechnet werden muß:

$$QS_{Fehler/Zelle} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n_Z}, \qquad \text{wobei } n_Z = \text{Anzahl der Probanden in der Zelle;} \tag{142}$$

$$QS_{Fehler} = \sum_{i=1}^{c} QS_{Fehler/Zelle}; \qquad df = N - pq. \tag{143}$$

Die übrigen Quadratsummen werden aus den Kennziffern nach folgenden Beziehungen berechnet:

$$QS_I = HM_n \cdot ((3'') - (1'')); \qquad df = p - 1; \tag{144}$$

$$QS_{II} = HM_n \cdot ((4'') - (1'')); \qquad df = q - 1;$$

$$QS_{I \times II} = HM_n \cdot ((5'') - (3'') - (4'') + (1'')); \qquad df = (p-1)(q-1);$$

$$QS_{total} = QS_I + QS_{II} + QS_{I \times II} + QS_{Fehler}.$$

Für die Durchführung mehrfaktorieller Varianzanalysen gelten keine anderen Voraussetzungen als für die einfaktorielle Varianzanalyse. Die Bedingung der Varianzhomogenität kann im Fall gleich großer Stichprobengrößen durch den $F_{max}$-Test, ansonsten durch den Bartlett-Test überprüft werden. Kommt der letztere zur Anwendung, so ist für die 2-faktorielle Varianzanalyse anstelle von p pq einzusetzen. Außerdem ist er über die Daten sämtlicher Zellen hinweg durchzuführen.

## 6.2. Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben

Als Pendant zum t-Test für abhängige Stichproben können auch Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben durchgeführt werden. Diese Verfahren wird man z.B. immer dann anwenden, wenn eine Stichprobe wiederholten Untersuchungen unterzogen wird.

### 6.2.1. Einfaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung (Pr. 48)

Bei einer einfaktoriellen Varianzanalyse mit Meßwiederholungen ergibt sich folgende Daten-Matrix:

| | | Faktor I (=Faktorstufen) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | ... | p | $\sum$ |
| Faktor II (=Vpn) | Vp 1 | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | ... | $X_p$ | II,1 |
| | Vp 2 | $X_{p+1}$ | $X_{p+2}$ | $X_{p+3}$ | ... | $X_{2p}$ | II,2 |
| | Vp 3 | $X_{2p+1}$ | $X_{2p+2}$ | $X_{2p+3}$ | ... | $X_{3p}$ | II,3 |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | Vp q | | | | | $X_{pq}$ | II,q |
| | $\sum$ | I,1 | I,2 | I,3 | ... | I,p | $\sum X$ |

Mit Bezug darauf werden folgenden Kennziffern definiert:

$$(1) = \frac{(\sum X_i)^2}{p \cdot q}; \qquad (145)$$

$$(2) = \sum_{i=1}^{pq} X_i^2;$$

$$(3) = \frac{I_{,1}^2 + I_{,2}^2 + I_{,3}^2 + \dots I_{,p}^2}{q};$$

$$(4) = \frac{II_{,1}^2 + II_{,2}^2 + II_{,3}^2 + \dots II_{,q}^2}{p}.$$

Für die Berechnung der Quadratsummen gelten dann folgende Beziehungen:

$$QS_{zwVpn} = (4) - (1); \qquad df = q - 1; \qquad (146)$$

$$QS_{inVpn} = (2) - (4) \; ; \qquad df = q(p-1) \; ;$$

$$QS_{treat\ I} = (3) - (1) \; ; \qquad df = p - 1 \; ;$$

$$QS_{res} = (2) - (3) - (4) + (1) \; ; \qquad df = (q-1)(p-1) \; ;$$

$$QS_{total} = (2) - (1) \; ; \qquad df = p \cdot q - 1 .$$

$QS_{zwVpn}$ repräsentiert die Unterschiede hinsichtlich des beobachteten Merkmals zwischen den verschiedenen Versuchspersonen, $QS_{inVpn}$ Meßunterschiede der Versuchspersonen von Treatmentstufe zu Treatmentstufe. Die $QS_{res}$, die Residualquadratsumme, enthält die Fehlerquadratsumme und den Interaktionsanteil. Die Varianzen werden wie in allen bisherigen Untersuchungsdesigns durch Division der Quadratsummen durch die zugehörigen Freiheitsgrade (df) errechnet. Die Bildung der F-Brüche erfolgt mit Hilfe der $V_{res}$, die in den Nenner gesetzt wird.
Für die Unterschiede zwischen den Vpn und zwischen den einzelnen Meßwerten der Vpn führt dies zu konservativen Entscheidungen, die durch großzügige Handhabung des Signifikanz-Niveaus abgefangen werden sollten.
Für den Einzelvergleich ist wiederum die Ermittlung kritischer Differenzen nach dem Scheffé - Test nötig:

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2(p-1)\ V_{res} \cdot F_{p-1,df\ res\ /100\%-p\%}}{q}} \qquad (147)$$

(für Vergleiche der Treatmentstufen des Faktors I);

$$Diff_{crit} = \sqrt{\frac{2(q-1)\ V_{res} \cdot F_{q-1,df\ res/100\%-p\%}}{p}}$$

(für Vergleiche zwischen den Versuchspersonen).

Diese Formeln sind offensichtlich identisch mit denen für die Berechnung der kritischen Differenzen für die Faktoren I und II der 2-faktoriellen Varianzanalyse, nur daß hier (wie stets in Varianzanalysen mit abhängigen Stichproben) die $V_{res}$ mit ihren Freiheitsgraden an der Stelle der $V_{Fehler}$ steht.
Wir führen das Verfahren an 7 Schülern vor, deren Benotung im Fach Deutsch durch 4 Lehrer analysiert werden soll:

| | Lehrer | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Schüler | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 2 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 16 |
| 3 | 2 | 3 | 4 | 4 | 13 |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | 14 |
| 5 | 4 | 4 | 5 | 5 | 18 |
| 6 | 3 | 3 | 5 | 4 | 15 |
| 7 | 1 | 2 | 4 | 3 | 10 |
| $\sum$ | 16 | 20 | 31 | 26 | 93 |

$$(1) = \frac{93^2}{7 \cdot 4} = 308{,}893; \quad (2) = 1^2+3^2+2^2+\ldots 4^2+3^2 = 351;$$

$$(3) = \frac{16^2 + 20^2 + 31^2 + 26^2}{7} = 327{,}571;$$

$$(4) = \frac{7^2+16^2+13^2+14^2+18^2+15^2+10^2}{4} = 329{,}750.$$

Daraus errechnen wir folgende Ergebnisse:

| QS | | df | V | p | VA |
|---|---|---|---|---|---|
| $QS_{zwVpn}$ | = 20,857 | 6 | 3,476 | $p < 1\%$ | 49,53% |
| $QS_{inVpn}$ | = 21,250 | 21 | 1,012 | $p < 1\%$ | 50,47% |
| $QS_{treat\ I}$ | = 18,678 | 3 | 6,226 | $p < 1\%$ | 87,90% |
| $QS_{res}$ | = 2,572 | 18 | 0,143 | | 12,10% |
| $QS_{total}$ | = 42,107 | 27 | 1,560 | | |

F-Bruch für $V_{zwVpn}$ : $F = \frac{3{,}476}{0{,}143} = 24{,}31$ (krit.Wert f.p =1%:4,01);

F-Bruch für $V_{inVpn}$ : $F = \frac{1{,}012}{0{,}143} = 7{,}08$ (krit.Wert f.p=1%:3,08);

F-Bruch für $V_{treat\ I}$ : $F = \frac{6{,}226}{0{,}143} = 43{,}54$ (krit.Wert f.p = 1%:5,09).

Bei der Interpretation ist zu beachten, daß sich die $QS_{total}$ aus der $QS_{zwVpn}$ und der $QS_{inVpn}$ zusammensetzt: Demnach sind die beobachteten Unterschiede zu 49,53% auf Unterschiede zwischen den Schülern und zu 50,47% auf solche zwischen den jeweiligen Benotungen der einzelnen Schüler zurückzuführen.

Die $QS_{inVpn}$ zerfällt wieder in einen Anteil, der auf den Treatmentfaktor I ("Lehrer") zurückzuführen ist und in den Residualanteil, der den Fehler- und den Interaktionsanteil enthält. Soweit die Unterschiede als solche zwischen den jeweiligen Benotungen der einzelnen Schüler zu verstehen sind, beruhen sie zu 87,90% auf dem Faktor "Lehrer", während nur 12,10% dieses Varianzanteils unaufgeklärt bleiben.
Nach dem Scheffé-Test errechnen wir folgende kritische Differenzen:

$$Diff_{crit\ zw\ Vpn} = \sqrt{\frac{2(7-1)0{,}143 \cdot 4{,}01}{4}} = 1{,}31 \quad (1\%\text{-Niveau});$$

$$Diff_{crit\ treat\ I} = \sqrt{\frac{2(4-1)0{,}143 \cdot 5{,}09}{7}} = 0{,}79 \quad (1\%\text{-Niveau}).$$

Benotungsunterschiede beim gleichen Schüler durch verschiedene Lehrer sind also bereits signifikant, wenn sie eine (genau:0,79) Notenstufe, bei verschiedenen Schülern und dem gleichen Lehrer sind sie erst signifikant, wenn sie mehr als eine (genau:1,31) Notenstufe betragen (falls man das 1%-Niveau zugrunde legt).

### 6.2.2. Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholung (F:. 49)

Selbstverständlich können auch Varianzanalysen mit Meßwiederholungen über mehrere Faktoren gerechnet werden. Gruppieren wir die Vpn noch zusätzlich nach einem bestimmten Gesichtspunkt (Faktor III), so erhalten wir eine 2-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen. Die Datenmatrix gestaltet sich in diesem Fall wie auf S.86 dargestellt.

Mit Bezug darauf werden folgende Kennziffern definiert:

$$(1) = \frac{(\sum_{i=1}^{pqr} X_i)^2}{p \cdot q \cdot r}; \quad (2) = \sum_{i=1}^{pqr} X_i^2; \quad (3) = \frac{I,1^2 + I,2^2 + \ldots I,p^2}{r \cdot q}; \qquad (148)$$

$$(4) = \frac{III,1^2 + III,2^2 + \ldots III,r^2}{q \cdot p};$$

$$(5) = \frac{Vpl,1/III,1^2 + Vpl,2/III,1^2 + \ldots \quad Vpl,1/III2^2 + \ldots \quad Vpl,P/III,r^2}{q};$$

$$(6) = \frac{\sum Vp1/III,1^2 + \sum Vp2/III,1^2 + \ldots \sum Vp1/III,1^2 + \ldots \sum Vpq/III,r^2}{p}.$$

Die Quadratsummen und Freiheitsgrade werden dann folgendermaßen berechnet:

$$QS_{III} = (4) - (1); \qquad df = r - 1; \qquad (149)$$

$$QS_{in\ Stpr} = (6) - (4); \qquad df = r(q - 1);$$

$$QS_{zw\ Vpn} = (6) - (1); \qquad df = rq - 1;$$

$$QS_{I} = (3) - (1); \qquad df = p - 1;$$

$$QS_{IxIII} = (5) - (3) - (4) + (1); \qquad df = (p-1)(r-1);$$

$$QS_{IxVpn} = (2) - (5) - (6) + (4); \qquad df = r \cdot (p-1)(q-1);$$

$$QS_{in\ Vpn} = (2) - (6); \qquad df = r \cdot q \cdot (p-1);$$

$$QS_{total} = (2) - (1); \qquad df = q \cdot p \cdot r - 1.$$

Als Prüfvarianz für die $V_{III}$ dient die $V_{in\ Stpr}$ (die Varianz innerhalb der Stichproben bzw. Gruppen), als solche für $V_I$ und für die $V_{IxIII}$ die $V_{IxVpn}$, vorausgesetzt, daß die Faktoren I und III "Feste Effekte" aufweisen.

| | | | Stufen des Faktors I | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | ... | p | |
| Stufen des Faktors III (=Gruppen) | 1 | Faktor II (=Vpn)<br>Vp 1<br>Vp 2<br>⋮<br>Vp q | ⋮<br>$\sum$ Vpl, 1/III, 1 | ⋮<br>$\sum$ Vpl, 2/III, 1 | ⋮<br>$\sum$ Vpl, 3/III, 1 | ⋮<br>... | ⋮<br>$\sum$ Vpl, p/III, 1 | Vp1/III, 1<br>Vp2/III, 1<br>⋮<br>Vpq/III, 1<br>III, 1 |
| | 2 | Faktor II<br>Vp 1<br>Vp 2<br>⋮<br>Vp q | ⋮<br>$\sum$ Vpl, 1/III, 2 | ⋮<br>$\sum$ Vpl, 2/III, 2 | ⋮<br>$\sum$ Vpl, 3/III, 2 | ⋮<br>... | ⋮<br>$\sum$ Vpl, p/III, 2 | Vp1/III, 2<br>Vp2/III, 2<br>⋮<br>Vpq/III, 2<br>III, 2 |
| | . . . . | Faktor II<br>Vp 1<br>Vp 2<br>⋮<br>Vp q | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| | r | Faktor II<br>Vp 1<br>Vp 2<br>⋮<br>Vp q | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮<br>$\sum$ Vpl, p/III, r | ⋮<br>Vpq/III, r<br>III, r |
| | | | I, 1 | I, 2 | I, 3 | ... | I, p | $\sum$ X |

Die $QS_{tot}$ zerfällt wiederum in die $QS_{zw\ Vpn}$ und die $QS_{in\ Vpn}$. Die erstere setzt sich aus der $QS_{III}$ und der $QS_{in\ Stpr}$, die letztere aus der $QS_{I}$, der $QS_{IxIII}$ und der $QS_{IxVpn}$ zusammen.
Dazu können nach dem Scheffé-Test kritische Differenzen für den Faktor III und für den Faktor I berechnet werden.
Es gelten folgende Beziehungen:

$$Diff_{crit\ I} = \sqrt{\frac{2(p-1)\cdot V_{IxVpn}\cdot F_{p-1,\ r(p-1)(q-1)/100-p\%}}{n\cdot q\cdot r}}\ ; \qquad (150)$$

$$Diff_{crit\ III} = \sqrt{\frac{2(r-1)\cdot V_{in\ Stpr}\cdot F_{(r-1),\ r(q-1)/100-p\%}}{n\cdot p\cdot q}}\ .$$

Das Verfahren sei demonstriert an der Analyse des Erfolgs von vier Methoden des Intelligenztrainings (Faktor I) an drei Altersstufen (Faktor III), wozu jeweils Gruppen von 5 Personen (Faktor II) beobachtet werden:

| | | | Stufen des Faktors I : Trainingsmethoden | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | $\sum$ |
| Stufen des Faktors III: Altersgruppen | Vp 1 | 1 | 101 | 108 | 108 | 107 | 424 |
| | Vp 2 | | 95 | 100 | 102 | 109 | 406 |
| | Vp 3 | | 112 | 115 | 117 | 118 | 462 |
| | Vp 4 | | 89 | 92 | 92 | 96 | 369 |
| | Vp 5 | | 78 | 89 | 91 | 93 | 351 |
| | | | 475 | 504 | 510 | 523 | 2012 |
| | Vp 1 | 2 | 120 | 125 | 128 | 131 | 504 |
| | Vp 2 | | 81 | 87 | 93 | 95 | 356 |
| | Vp 3 | | 83 | 88 | 90 | 89 | 350 |
| | Vp 4 | | 99 | 103 | 102 | 109 | 413 |
| | Vp 5 | | 104 | 107 | 108 | 109 | 428 |
| | | | 487 | 510 | 521 | 533 | 2051 |
| | Vp 1 | 3 | 73 | 85 | 97 | 97 | 352 |
| | Vp 2 | | 97 | 109 | 111 | 109 | 426 |
| | Vp 3 | | 92 | 100 | 103 | 110 | 405 |
| | Vp 4 | | 117 | 121 | 121 | 125 | 484 |
| | Vp 5 | | 100 | 115 | 127 | 129 | 471 |
| | | | 479 | 530 | 559 | 570 | 2138 |
| | | $\sum$ | 1441 | 1544 | 1590 | 1626 | 6201 |

(1) $= \frac{6201^2}{4 \cdot 3 \cdot 5} = 640873{,}340;$ (2) $= 101^2 + 95^2 + 112^2 + \ldots 125^2 + 129^2 = 651831;$

(3) $= \frac{1441^2 + 1544^2 + 1590^2 + 1626^2}{3 \cdot 5} = 642159{,}530;$

(4) $= \frac{2012^2 + 2051^2 + 2138^2}{4 \cdot 5} = 641289{,}450;$

(5) $= \frac{475^2 + 487^2 + 479^2 + \ldots 504^2}{5} = 642758{,}200;$

(6) $= \frac{424^2 + 406^2 + 462^2 + \ldots 471^2}{4} = 649981{,}250.$

Es ergibt sich:

| QS | | | df | V | p | VA |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $QS_{III}$ | = | 416,11 | 2 | 208,06 | $p > 25\%$ | 3,80% |
| $QS_{in\,Stpr}$ | = | 8691,8 | 12 | 724,32 | | 79,32% |
| $QS_{zwVpn}$ | = | 9107,91 | 14 | 650,57 | | 83,12% |
| $QS_{i}$ | = | 1286,19 | 3 | 428,73 | $p < 1\%$ | 11,74% |
| $QS_{IxIII}$ | = | 182,56 | 6 | 30,43 | $p < 5\%$ | 1,67% |
| $QS_{IxVpn}$ | = | 381,0 | 36 | 10,58 | | 3,48% |
| $QS_{inVpn}$ | = | 1849,75 | 45 | 41,11 | | 16,88% |
| $QS_{total}$ | = | 10957,66 | 59 | 185,72 | | |

# 7. Skalierungsverfahren

Oft können Größen nicht exakt gemessen, sondern nur anhand irgendwelcher Kategorien einer Schätzung unterzogen werden, oder sie sind nicht direkt meßbar, man kann nur Reaktionen von Versuchspersonen erheben. Es ergibt sich dann das Problem, die Schätzurteile bzw. die Reaktionen im nachhinein in eine Ordnung zu bringen, die eine quantitative Weiterbearbeitung erlaubt.
Die Statistik kennt eine ganze Reihe von z.T. recht komplizierten Skalierungsverfahren. Wir beschränken uns im folgenden auf einige einfacher zu handhabende. Sie lassen sich unterteilen in solche, die zu Intervallskalen, und solche, die nur zu Rangskalen führen.

## 7.1. Erstellung von Intervallskalen

Als intervallskalierende Verfahren sehen wir solche an, die über eine bloße Rangfolge hinaus Skalen mit genauen Zahlenwerten liefern.

### 7.1.1. Rating (Pr. 51)

Beim Rating lassen wir durch Versuchspersonen einzelnen Objekten unmittelbar Zahlenwerte zuordnen.
Es sei angenommen, 4 Fahrlehrer hätten die Fahrtüchtigkeit von 10 Fahrschülern mit einer Punktzahl von 1 bis 10 zu bewerten:

| Fahrschüler | Experten 1 | 2 | 3 | 4 | $\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ | $\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2$ | $\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N}$ | $\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1,50 | 2,25 | 2,50 | 0,25 |
| 2 | 4 | 3 | 4 | 5 | 4,00 | 16,00 | 16,50 | 0,50 |
| 3 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1,50 | 2,25 | 2,50 | 0,25 |
| 4 | 3 | 3 | 2 | 4 | 3,00 | 9,00 | 9,50 | 0,50 |
| 5 | 1 | 1 | 2 | 3 | 1,75 | 3,06 | 3,75 | 0,69 |
| 6 | 3 | 4 | 5 | 3 | 3,75 | 14,06 | 14,75 | 0,69 |
| 7 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1,50 | 2,25 | 2,50 | 0,25 |
| 8 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4,75 | 22,56 | 22,75 | 0,19 |
| 9 | 4 | 4 | 3 | 3 | 3,50 | 12,25 | 12,50 | 0,25 |
| 10 | 5 | 5 | 4 | 5 | 4,75 | 22,56 | 22,75 | 0,19 |
| | | | | | 30,00 | 106,24 | | 3,76 |

Die Werte in der Spalte $\frac{\sum_{i=1}^{K} x_i}{N}$ sind die Skalenwerte für die einzelnen Objekte, hier die Fahrschüler.
Man sollte im allgemeinen den Übereinstimmungsgrad der Beurteiler mit kontrollieren. Man errechnet zu diesem Zweck als Prüfgröße:

$$Ü = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2\right]}{N-1} \Bigg/ \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)^2 - \frac{1}{k}\cdot\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}\right)\right]^2 . \qquad (151)$$

(Pr.51)

Dabei ist N = Zahl der Beurteiler (Experten),
k = Zahl der Objekte.

In unserem Beispiel erhalten wir:

$$Ü = 1 - \frac{\frac{3,76}{4-1}}{106,24 - \frac{1}{10}\cdot 30^2} = 0,92.$$

Der Übereinstimmungsgrad kann maximal 1,00 und minimal 0 betragen. Ein geringer Übereinstimmunsgrad muß nicht unbedingt ein Anzeichen für die geringe Urteilskraft der Experten sein. Es kann sich auch um Objekte handeln, die schwierig zu beurteilen sind.

### 7.1.2. Paarvergleich

Ein Verfahren, das die Versuchspersonen nötigt, jeweils zwei Objekte gesondert miteinander zu vergleichen, und dadurch in vielen Fällen zu genaueren Ergebnissen führt, ist der sog. Paarvergleich.
Es sei der soziale Rangunterschied zwischen folgenden Gruppen zu ermitteln:
1. Arbeiter, 2. Industrielle ohne Studium, 3. Akademiker im öffentlichen Dienst, 4. leitende Angestellte mit akademischer Ausbildung, 5. Großbauern.
Nach den Urteilen einer Versuchsperson erstellen wir eine sog. Distanz-Matrix:

| | 1 - | 2 - | 3 - | 4 - | 5 - |
|---|---|---|---|---|---|
| - 1 | 0 | 10 | 8 | 7 | 6 |
| - 2 | - 10 | 0 | - 1 | - 3 | - 4 |
| - 3 | - 8 | 1 | 0 | 1 | - 5 |
| - 4 | - 7 | 3 | - 1 | 0 | - 3 |
| - 5 | - 6 | 4 | 5 | 3 | 0 |
| $\sum$ | - 31 | 18 | 11 | 8 | - 6 |
| $\frac{\sum}{k}$ | - 6,2 | 3,6 | 2,2 | 1,6 | - 1,2 |

Die Minuszeichen hinter den Zahlen an der Kopfleiste sollen bedeuten, daß von diesen Größen abzuziehen ist, die Minuszeichen vor den Zahlen an der linken Randspalte wollen darauf hinweisen, daß die Größen in Abzug zu bringen sind.

Die Zahl 10 in der ersten Zeile kommt demnach dadurch zustande, daß die Versuchsperson den Unterschied zwischen Personengruppe 2 (Industrielle ohne Studium) und Personengruppe 1 (Arbeiter) mit 10 veranschlagt, und zwar werden die Industriellen höher eingeschätzt: Der Status der Gruppe 2 minus dem Status der Gruppe 1 ergibt eine Differenz von 10. Entsprechend muß die Umkehrung dieser Fragestellung -10 ergeben (1. Zahl der 2. Zeile). Negative Zahlen bedeuten immer, daß das erstgenannte Objekt niedriger eingestuft wird. Die diagonalsymmetrisch zueinander liegenden Zahlen der Matrix ergeben zusammen jeweils Null, d.h. sie unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Ein Objekt, das mit sich selbst verglichen wird, erhält den Betrag 0.
Wir addieren die Spalten einer solchen Distanz-Matrix auf und dividieren die Spaltensummen durch die Anzahl der Objekte (hier: 5). Die so erhaltenen Werte sind die gesuchten Skalenwerte. Es ergibt sich also folgende Rangordnung der Gruppen mit den nachstehenden Skalenwerten:

| | |
|---|---|
| Industrielle ohne Studium | 3,6 |
| Akademiker im öffentl. Dienst | 2,2 |
| leitd.Angest.mit ak.Ausbildg. | 1,6 |
| Großbauern | -1,2 |
| Arbeiter | -6,2 |

Beim Paarvergleich ist eine sog. Nullpunkttransformation statthaft. Durch Addition von 6,2 zu allen Skalenwerten erhalten wir die transformierte Skala:

0 5,0 7,8 8,4 9,8

Bei einer Skalierung durch mehrere Versuchspersonen werden die Differenzen für jede Stelle der Distanz-Matrix arithmetisch gemittelt.

Beim Rating und beim Paarvergleich empfiehlt es sich in manchen Fällen, den Beurteilungsspielraum vorzugeben. In unserem Beispiel zum Paarvergleich durften nur Differenzen zwischen 0 und 10 genannt werden. Darüber hinaus kann man die Gefahr, daß Versuchspersonen manchmal den gesamten verfügbaren Beurteilungsspielraum nicht genügend ausschöpfen, dadurch beseitigen, daß man vorschreibt, wie oft jede Bewertung vergeben werden darf. Im Beispiel zum Rating mußte jeder Fahrlehrer jede der Bewertungen von 1 bis 5 gleich häufig, in diesem Falle also zweimal, vergeben. Es lassen sich auch Fälle denken, in welchen andere Verteilungsformen vorgegeben werden können, z.B. eine Normalverteilung.

### 7.1.3. Likert-Skala (Pr. 52)

Unter der Voraussetzung, daß das zu skalierende Merkmal an sich normalverteilt ist, kann man eine sog. Likert-Skala erstellen, die auf eine Transformation der Häufigkeiten in z-Werte der Standardnormalverteilung hinausläuft.
Nehmen wir an, eine größere Zahl von Studenten sei gebeten worden, verbale Urteile über 3 Lehrveranstaltungen abzugeben:

Lehrveranstaltungen

| | 1 | 2 | 3 | $\sum$ | p | $S_{\%}$ | PR | PR-50 | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| zu schwierig | 82 | 123 | 101 | 306 | 13,15 | 13,15 | 6,58 | -43,42 | -1,51 |
| sehr anspruchs-voll | 130 | 133 | 99 | 362 | 15,56 | 28,71 | 20,93 | -29,07 | -0,81 |
| anspruchsvoll | 287 | 75 | 145 | 507 | 21,79 | 50,50 | 39,61 | -10,39 | -0,26 |
| verständlich | 73 | 305 | 133 | 511 | 21,96 | 72,46 | 61,48 | 11,48 | 0,29 |
| leicht | 62 | 256 | 179 | 497 | 21,36 | 93,82 | 83,14 | 33,14 | 0,96 |
| primitiv | 11 | 98 | 35 | 144 | 6,19 | 100,00 | 96,91 | 46,91 | 1,87 |
| | | | | 2327 =100% | | | | | |

Zunächst addieren wir die Zeilenwerte auf. In der anschließenden Spalte p formen wir diese in Prozente um. In der Spalte $S_{\%}$ werden die Prozente kumuliert, d.h. wir geben jeweils an, wieviele Prozente bis zu der betreffenden Kategorie liegen. Wir haben demnach für die zweite Kategorie zu rechnen 15,56 + 13,15 = 28,71; für die dritte 21,79 + 15,56 + 13,15 = 50,50 usw. Die Spalte PR enthält die Prozentränge, die wir nach der Beziehung:

$$PR = S_{\%} - \frac{p}{2} \qquad (152)$$

errechnen. Für die erste Kategorie ergibt sich demnach

$$PR = 13,15 - \frac{13,15}{2} = 6,68,$$

für die dritte

$$PR = 28,71 - \frac{15,56}{2} = 20,93.$$

Die folgende Spalte erhalten wir, wenn wir von den errechneten Werten jeweils 50 abziehen. Zu den Werten dieser Spalte schlagen wir nun in Tabelle 1 die Flächen der z-Werte nach. Dabei sind die Prozente wieder in die dezimale Schreibweise rückzutransformieren, also

$$- 43,42\,\% = - 0,4342.$$

Diesem Wert kommt in Tabelle 1 die Fläche 0,4345 am nächsten. Der zugehörige z-Wert von 1,51 ist der Skalenwert der ersten Kategorie. Da der Wert in der vorhergehenden Spalte negativ war, erhält auch er ein negatives Vorzeichen.

Die z-Werte sind Skalenwerte der Beurteilungskategorien, nicht solche der beurteilten Objekte! Es ist jedoch ohne weiteres möglich, durch Anschreiben der Spalten als Zeilen auch Skalenwerte für die Objekte, hier die Lehrveranstaltungen, zu errechnen. Nur sollte dann in unserem Beispiel das Beurteilungskriterium einheitlich sein, etwa eine Klassifizierung als "schwierig".
Es ist zulässig, eine lineare Transformation vorzunehmen. Um die Skala mit 0 beginnen zu lassen, addieren wir zu allen z-Werten den Betrag 1,51. Es ergibt sich:

| | |
|---|---|
| zu schwierig | 0,00 |
| sehr anspruchsvoll | 0,70 |
| anspruchsvoll | 1,25 |
| verständlich | 1,80 |
| leicht | 2,47 |
| primitiv | 3,38 |

### 7.1.4. Häufigkeitsanalyse nach Guttmann (Pr. 53)

Eine Skalierung nach Guttmann wird man vornehmen, wo Phänomene hierarchisch geordnet sind. Bei 10 hierarchisch geordneten Testaufgaben würde das bedeuten, daß jeder, der die zweitleichteste lösen kann, auch die leichteste zu lösen vermag, daß die Lösung der nächsten Aufgabe die der beiden vorhergehenden impliziert usw.
Ein Beispiel hierfür mag die Beherrschung arithmetischer Grundfertigkeiten sein. Die folgenden Beziehungen scheinen z.T. plausibel: Wer addieren kann, beherrscht auch das Zählen. Wer subtrahieren (im Sinne des Daraufzählens) kann, vermag auch zu addieren und zu zählen. Ebenso setzt Multiplizieren die genannten Grundfertigkeiten voraus (das Subtrahieren in Form des Daraufzählens bei Überläufen) und Dividieren schließlich alle bisher genannten Operationen.
Nehmen wir an, wir hätten die Häufigkeit der Beherrschung dieser Operationen durch eine Stichprobe von Grundschülern erhoben:

| | | p | $S_{\%}$ | PR |
|---|---|---|---|---|
| Zählen | 4 | 1,30 | 1,30 | 0,65 |
| Addieren | 14 | 4,55 | 5,85 | 3,58 |
| Subtrahieren | 32 | 10,39 | 16,24 | 11,05 |
| Multiplizieren | 58 | 18,83 | 35,07 | 25,66 |
| Dividieren | 200 | 64,94 | 100,00 | 67,53 |

Die Häufigkeiten sind so zu verstehen, daß z.B. 14 Schüler nur addieren, damit natürlich auch zählen, aber nicht subtrahieren, multiplizieren und dividieren können usw.
Die Spalten p, $S_{\%}$ und PR werden wie in einer Likert-Skala berechnet. Die Werte in der Spalte PR sind hier bereits die Skalenwerte. Man kann sie einer Ähnlichkeitstransformation unterziehen und erhält dann (indem man alle Werte durch 0,65 dividiert):

| | |
|---|---|
| Zählen | 1,00 |
| Addieren | 5,51 |
| Subtrahieren | 17,00 |
| Multiplizieren | 39,48 |
| Dividieren | 103,89 |

## 7.2. Erstellung von Rangskalen

Rangordnungsverfahren ergeben keine Zahlenwerte für einzelne Skalenpunkte, sondern nur eine Reihenfolge von Objekten, Phänomenen oder Aussagen. Sie setzen der Weiterverarbeitung engere Grenzen, machen aber weniger theoretische Voraussetzungen als Verfahren der Intervallskalierung.

### 7.2.1. Rangordnungsverfahren

Hier handelt es sich eigentlich um ein Rating im Hinblick auf Rangplätze: Die Versuchspersonen werden gebeten, eine Anzahl von Objekten in eine Rangfolge zu bringen: verbundene Ränge (also das mehrmalige Vergeben desselben Ranges) sind verboten.
Die Beurteilung von 7 Schokolademarken im Hinblick auf ihre Qualität durch 5 Versuchspersonen möge folgende Daten ergeben haben:

| | | Schokolademarken | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| Beurteiler | 1 | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 | 7 | 6 | |
| | 2 | 4 | 3 | 6 | 2 | 1 | 7 | 5 | |
| | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 3 | 7 | 6 | |
| | 4 | 6 | 1 | 5 | 3 | 2 | 7 | 4 | |
| | 5 | 4 | 1 | 5 | 3 | 2 | 6 | 7 | |
| | $\sum R$ | 23 | 8 | 25 | 12 | 10 | 34 | 28 | $\sum = 140$ |
| | Skala | IV | I | V | III | II | VII | VI | MR= 140:7=20 |
| | $\lvert MR - R \rvert$ | 3 | 12 | 5 | 8 | 10 | 14 | 8 | |

Die Ränge, die jedes Objekte erhalten hat, werden aufaddiert. Diese Rangsummen bilden die Grundlage für die Erstellung einer Rangskala nach der Größe der Rangsummen.
Der Leser dürfte bemerkt haben, daß dieses Verfahren eigentlich schon beim Konkordanzkoeffizienten (vgl. S.43 ) dargestellt wurde. So kann man denn auch den Konkordanzkoeffizienten berechnen, um das Maß der erreichten Übereinstimmung zu prüfen und eine Signifikanzprüfung vorzunehmen:

$$W = \frac{602}{\frac{1}{12} \cdot 5^2 \cdot (7^3 - 7)} = 0{,}86.$$

Der Zähler von 602 weist eine Signifikanz auf dem 1%-Niveau aus: Der kritische Wert, den wir in Tabelle 12 nachschlagen können, beträgt 343,8 und wird bei weitem überschritten.
Wollen wir eine Skala aus sehr vielen Objekten bilden, kann es sein, daß wir die

Kapazitäten des Programms für den Konkordanzkoeffizienten überschreiten. Man kann dann einen mittleren Rangkorrelationskoeffizienten berechnen nach der Beziehung:

$$\bar{R} = 1 - \frac{k\,(4N+2)}{(k-1)\,(N-1)} + \frac{12 \sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1} R)^2}{k\,(k-1)\,N(N^2-1)}. \qquad (153)$$

Dabei ist k = Anzahl der Beurteiler,
N = Anzahl der beurteilten Objekte.

In unserem Falle ergibt sich:

$$R = 1 - \frac{5(4 \cdot 7 + 2)}{(5-1)\cdot(7-1)} + \frac{12\,(23^2+8^2+25^2+12^2+10^2+34^2+28^2)}{5\cdot(5-1)\cdot 7\cdot(7^2-1)} = 0{,}825.$$

Zur Signifikanzprüfung ist zunächst zu überlegen, aus wieviel verschiedenen Korrelationen der errechnete mittlere Rangkorrelationskoeffizient gemittelt ist:

$$n = \frac{k(k-1)}{2}. \qquad (154)$$

In unserem Falle liegen also

$$n = \frac{5(5-1)}{2} = 10 \text{ Korrelationen zugrunde.}$$

Damit können wir nach (44 ) den Standardfehler des Z-Wertes einer mittleren Korrelation ermitteln:

$$S = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot (7-3) + 3}} = 0{,}152.$$

Nach Tabelle 10 entspricht einer Korrelation von 0,825 ein Z-Wert von 1,19. Möchten wir die Signifikanz auf dem 1%-Niveau prüfen, so ergibt sich nach Tabelle 1 ein z-Wert der Standardnormalverteilung für p/2 von 2,58. Diesen Wert setzen wir nun in Beziehung ( 46 ) ein, um den Vertrauensbereich von $R_z$ zu berechnen:

Vertrauensbereich $\bar{R}_z = 1{,}19 \pm 2{,}58 \cdot 0{,}152;$
$= 1{,}19 \pm 0{,}392.$

Der Wert 0 fällt also auf jeden Fall aus dem Vertrauensbereich heraus. R ist auf dem 1%-Niveau signifikant.
Diese Prüfung ist insofern nur ein Näherungsverfahren, als wir den durchschnittlichen Rangkorrelationskoeffizienten wie einen Produktmomentkorrelationskoeffizienten behandelt haben. Da der Wert eines Rangkorrelationskoeffizienten aber mit zunehmender Stichprobengröße ohnehin dem eines Produktmomentkorrelationskoeffizienten sehr nahe kommt und wir andererseits nur bei einer großen Anzahl

von Objekten nicht mit dem Konkordanzkoeffizienten arbeiten können, ist die Näherung recht gut.

### 7.2.2. Rangordnung durch Paarvergleich

Ein subtileres Verfahren ist die Rangordnung durch Paarvergleich. Hier werden die Versuchspersonen zu jedem möglichen Paar von Objekten befragt, welches sie höher einstufen (welches "dominiert"). Man kann auf diese Weise vor allen Dingen logische Widersprüche im Beurteilerverhalten zutage fördern und analysieren.

Wenn eine Person Dominanzurteile über die Größen von Hans, Maria und Karl abzugeben hat und die beiden Aussagen macht:

"Hans ist größer als Maria."
"Maria ist größer als Karl."

Dann folgt daraus, daß Hans größer als Karl sein muß. Würde die befragte Person urteilen "Karl ist größer als Hans", dann hätte sie widersprüchliche Aussagen gemacht. Eine solche Aussagengruppe heißt eine "zirkuläre Triade".
Bei der Rangordnung durch Paarvergleich kann die Konsistenz der Urteile über die Analyse solcher zirkulärer Triaden geprüft werden. Unzureichende Konsistenz kann im Unvermögen der befragten Person, aber auch in der Schwierigkeit der Materie liegen. Sie sollte jedenfalls immer davon abhalten, eine Rangskalierung vorzunehmen.
Wir nehmen an, eine Versuchsperson habe Dominanzurteile über die folgenden mathematischen Lehrstoffe hinsichtlich der Schwierigkeit abzugeben: 1. Klammerrechnungen, 2. lineare Gleichungen, 3. quadratische Gleichungen, 4. Wurzelrechnungen, 5. Exponentialrechnungen, 6. Logarithmen, 7. trignometrische Funktionen. Es sei folgende Dominanz-Matrix entstanden:

| | | Objekte | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Objekte | 1 | - | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| | 2 | 0 | - | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 3 | 0 | 0 | - | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 4 | 0 | 1 | 1 | - | 0 | 1 | 1 |
| | 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | - | 1 | 0 |
| | 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | - | 0 |
| | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | - |
| | Sp | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 5 | 3 |

Zeile 1 bedeutet, daß die Versuchsperson folgendermaßen geurteilt hat:
2 ist schwerer als 1 (bei Dominanz des 1. Objektes wird eine 1, bei Dominanz des 2. Objektes eine 0 geschrieben), 3 ist schwerer als 1, 4 ist schwerer als 1, 5 ist leichter als 1, 6 ist schwerer als 1, 7 ist schwerer als 1.
Die diagonalsymmetrisch zueinander liegenden Werte müssen sich jeweils zu 1 ergänzen, d.h. einer 1 korrespondiert jeweils eine 0.
Wir addieren nun die Spalten auf und errechnen nach folgender Beziehung die Konsistenz:

$$K = \frac{2n(n-1)\cdot(2n-1) - 12\sum_{i=1}^{m}(Sp\sum)^2}{n\cdot(n^2-4)}, \qquad \text{falls n geradzahlig;} \qquad (155)$$

(Pr.54)

$$K = \frac{2n(n-1)(2n-1) - 12\sum_{i=1}^{m}(Sp\sum)^2}{n\cdot(n^2-1)}, \qquad \text{falls n ungeradzahlig}$$

(n=Zahl der Objekte).

In unserem Beispiel ergibt sich:

$$K = \frac{2\cdot 7\cdot(7-1)\cdot(2\cdot 7-1) - 12\cdot(1^2+3^2+4^2+2^2+3^2+5^2+3^2)}{7\cdot(7^2-1)} = 0{,}64.$$

Die Konsistenz der Urteile, die unsere Versuchsperson abgab, liegt somit etwas über dem Mittelmaß. Ob man sie als zureichend ansieht, dürfte in diesem Falle nicht ganz leicht zu entscheiden sein. Zur Entscheidungshilfe sehr nützlich ist ein $Chi^2$ - Test der Konsistenz, der aber nur durchgeführt werden kann, wenn es sich um mindestens 7 Objekte handelt. $Chi^2$ errechnet sich dann nach der Beziehung:

$$Chi^2 = \left(\frac{8}{n-4}\right)\left[\frac{n!}{24\cdot(n-3)!} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(2n-1)}{12} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(Sp\sum)^2 + \frac{1}{2}\right] + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(n-4)^2} \qquad (156)$$

(Pr.54)

$$\text{bei df} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(n-4)^2}.$$

In unserem Beispiel erhalten wir:

$$Chi^2 = \left(\frac{8}{7-4}\right)\left[\frac{7!}{24(7-3)!} - \frac{7\cdot(7-1)\cdot(2\cdot 7-1)}{12} + \frac{1}{2}\cdot 73 + \frac{1}{2}\right] + \frac{7\cdot(7-1)\cdot(7-2)}{(7-4)^2} = 24{,}00;$$

$$df = \frac{7\cdot(7-1)\cdot(7-2)}{(7-4)^2} = 23{,}33.$$

Für df = 23 finden wir in Tabelle 2 für das 5%-Niveau einen kritischen Wert von 35,17. Die Konsistenz ist also nicht signifikant, so daß es sich nicht empfiehlt, eine Rangordnung vorzunehmen.
Wäre $Chi^2$ signifikant gewesen, wäre die Rangordnung der Objekte einfach dadurch herzustellen gewesen, daß man sie nach ihren Spaltensummen geordnet

hätte. Es würde sich folgende Rangordnung ergeben haben:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Objekt | 1 | 4 | | 2,5,7 | | 3 | 6 |
| Rangplatz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

(Die Objekte 2,5 und 7 haben gleiche Rangsummen. Sie werden darum gemeinsam dem mittleren der ihnen zukommenden Rangplätze 3 bis 5, dem Rangplatz 4, zugeteilt.)

Natürlich wird man zum Zwecke der Skalierung mehrere Versuchspersonen befragen. Die Dominanzmatrizen werden dann zu einer kombinierten Dominanzmatrix vereinigt, indem man einfach die Elemente an den gleichen Stellen aufaddiert. Es empfiehlt sich aber, den etwas umständlichen Weg zu gehen und zunächst die einzelnen Matrizen für die Versuchspersonen aufzustellen, weil man auf diese Weise vorher prüfen kann, ob eine solche Vereinigung überhaupt zulässig ist. Dazu müssen die einzelnen Versuchspersonen als derselben Stichprobe angehörig betrachtet werden können. Diese These prüft man, wie oben auf S.33 schon gezeigt, am besten mit einem Cochran-Test.

Wir führen nachstehend noch einmal die schon analysierte Dominanzmatrix mit drei weiteren auf und eine daraus gebildete kombinierte Dominanzmatrix:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | - | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | - | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | - | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 1 | - | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | - | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | - |
| | 1 | 3 | 4 | 2 | 3 | 5 | 3 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | - | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | - | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | - | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | - | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | - | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | - |
| | 1 | 2 | 2 | 5 | 3 | 4 | 4 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | - | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | - | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | - | 1 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 0 | - | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | - | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | - |
| | 2 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 2 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | - | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | - | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | - | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | - | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | - |
| | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 5 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 2 | 2 | 4 | 2 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | - | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 |
| 3 | 2 | 1 | - | 1 | 2 | 4 | 3 |
| 4 | 0 | 1 | 3 | - | 2 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 1 | 2 | 2 | - | 3 | 1 |
| 6 | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | - | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 4 | - |
| | 6 | 8 | 11 | 13 | 13 | 19 | 14 |

Die für einen Cochran-Test benötigten Werte ermitteln wir auf folgende Weise:

Wir summieren alle Werte in der rechts oben von der Diagonale der Leerzellen liegenden Hälfte der kombinierten Dominanzmatrix. Diese Summe ist die $\sum U$, die in diesem Falle gleich der $\sum Vp$ ist.
Wir quadrieren jeden der eben aufaddierten Werte und summieren die Quadrate. Der Betrag , den wir auf diese Weise erhalten, ist die $\sum Vp^2$.
Wir addieren die Werte in jeder einzelnen Dominanzmatrix, die in der Hälfte rechts oben von der Diagonale liegen, und quadrieren die Summe für jede einzelne Matrix. Die Summe dieser Quadrate ist die $\sum U^2$.
In unserem Beispiel rechnen wir:

$$2+2+4+2+\ldots 3+1 = 53 = \sum U = \sum Vp;$$
$$2^2+2^2+4^2+2^2+\ldots 3^2+1^2 = 157 = \sum Vp^2.$$

| Matrix | U | $U^2$ |
|---|---|---|
| 1 | 13 | 169 |
| 2 | 13 | 169 |
| 3 | 10 | 100 |
| 4 | 17 | 289 |
| | | $727 = \sum U^2$, |

Zahl der einzelnen Dominanzmatrizen = 4 = k.
Nach ( 69 ) ist

$$Chi^2 = \frac{(4-1)\cdot(4\cdot 727 - 53^2)}{4\cdot 53 - 157} = 5{,}40.$$

Bei df = k - 1 = 3 ist dieser Wert auf dem 5%-Niveau nicht signifikant: Der kritische Wert nach Tab. 2 würde 7,82 betragen. Man darf also davon ausgehen, daß die 4 Versuchspersonen, von denen die einzelnen Dominanzmatrizen stammen, derselben Stichprobe angehören. Insofern wäre einer Zusammenfassung der Daten nichts entgegenzuhalten, wenn nur die Konsistenz hinreichte. Die Rangskala wird dann aus einer kombinierten Dominanzmatrix ebenso aus den Spaltensummen gewonnen, wie wir es oben an einer einzelnen Dominanzmatrix bereits vorführten.

## 7.3. Weitere Verfahren

Man kann nach einem Verfahren von Hull Rangplätze in Prozenträge umrechnen nach der Beziehung:

$$R_{\%} = (R - 0,5) \cdot \frac{100}{N}. \qquad (157)$$

Dabei ist R = Rangplatz,
N = Zahl der verglichenen Objekte.

Für die oben aus einer (allerdings recht inkonsistenten!) Dominanzmatrix gewonnenen Ränge (vgl. S. 98) hätten wir zu rechnen:

$N = 7$

$R_{\%_1} = (1 - 0,5)\frac{100}{7} = 7,14$

$R_{\%_2} = (2 - 0,5)\frac{100}{7} = 21,43$

$R_{\%_3} = (4 - 0,5)\frac{100}{7} = 50,00$

$R_{\%_4} = (6 - 0,5)\frac{100}{7} = 78,57$

$R_{\%_5} = (7 - 0,5)\frac{100}{7} = 92,86$

Zu diesen Prozenträngen können wir in Tabelle 14 Skalenplätze nachschlagen. Anstelle von 7,14 wählen wir den am nächsten liegenden Wert 6,81 und entnehmen dazu den Skalenplatz 2,1. Entsprechend verfahren wir mit den übrigen Prozenträngen und gewinnen folgende Skala:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Objekt | 1 | 4 | 2,5,7 | 3 | 6 |
| Skalenplatz | 2,1 | 3,4 | 5,0 | 6,6 | 7,9 |

Auch die oben schon behandelten z-Standardisierungen und Prozenträge (vgl. S. 8) stellen in gewissem Sinne Skalen dar. Mit ihrer Hilfe können jedenfalls Messungen in verschiedenen Einheiten vergleichbar gemacht werden. Wenn wir wissen, daß ein Schüler 3,27m weit gesprungen und 75m in 13,6sec gelaufen ist, haben wir Schwierigkeiten, diese Leistungen in ein Verhältnis zu setzen. Die Aussage, er habe innerhalb der Altersgruppe an seiner Schule im Weitsprung einen Prozentrang von 87,3 und im 75m-Lauf einen solchen von 68,9 erreicht, erlaubt unmittelbar die Folgerung, daß er - wenn man die Leistungen seiner Altersgenossen zugrundelegt - offenbar im Weitsprung besser als im 75m-Lauf ist. In ähnlicher Weise hätten wir auch z-Werte verwenden können.

# II. Teil: Programme

Die folgenden Programme sind jeweils in zwei Varianten ausgearbeitet: in algebraischer Eingabelogik (AOS), wie sie den Rechnern von Texas Instruments zugrundeliegt, und in umgekehrter polnischer Notation (UPN) für die Rechner von Hewlett & Packard.
Die Programme laufen so, wie sie sind, auf dem TI-58, TI-58C und TI-59 sowie auf dem HP 67 und dem HP 97. Die TI-Varianten können z.T. auch auf dem TI-57 abgewickelt werden, soweit sie nicht eine Speicherkapazität von mehr als 7 Datenregistern und mehr als ca. 60 - 65 Programmschritte benötigen.[1] Ferner darf keine indirekte Adressierung und keine mit "Op" aufzurufende festprogrammierte Operation vorkommen. Soweit nicht mehr als 98 Programmzeilen benötigt werden, laufen die HP-Varianten auch auf dem HP 19 C und 29 C. Allerdings müssen beim TI 57 die Labels anders gesetzt und beim HP 19C und 29 C Besonderheiten in der indirekten Adressierung, beim Aufrauf der Primär- und Sekundärregister und bei der Verwendung des I-Registers berücksichtigt werden. Um die Abänderung für die HP-Varianten nicht allzusehr zu erschweren, wurden bei geeigneten Programmen grundsätzlich numerische Labels verwendet, die zugegebenermaßen dem vorhandenen Bedienungskomfort des HP 67 und HP 97 nicht optimal gerecht werden. Auch wurde darauf verzichtet, die in diesen Rechnern festprogrammierte Funktion "Fakultät" (X!) zu verwenden. Besitzer dieser Modelle können leicht entsprechende Programmteile durch die X!-Taste ersetzen.
Auf spezielle Statistik-Software von Texas-Instruments und Hewlett & Packard wurde kein Bezug genommen, da wir nicht voraussetzen mochten, daß der Benutzer auch diese besitzt. Es sei aber betont, daß sich die Anschaffung in vielen Fällen lohnen dürfte, weil sie eine große Zahl weiterer Möglichkeiten eröffnet und die Arbeit in mancherlei Hinsicht komfortabler wird.
Bei der Programmierung sind nicht immer alle Möglichkeiten ausgeschöpft, um die Länge auf ein Minimum zu beschränken. Die Übersichtlichkeit der Programme auch für einen wenig eingeweihten Leser sollte nicht irgendwelchen Tricks und kunstvollen Techniken geopfert werden, mit deren Hilfe man da und dort noch ein paar Schritte einsparen könnte.

---

1) Der TI 57 hat eine Kapazität von 50 Programmschritten, wobei jedoch je nach Programm in die einzelnen Schritte bis zu einem Drittel mehr an Information verpackt werden kann.

Es wäre an sich wünschenswert, den Aufbau zumindest der komplizierteren Programme jeweils durch Ablaufschemata zu verdeutlichen. Angesichts des damit zwangsläufig verbundenen größeren Umfanges und höheren Preises des Buchs wurde davon Abstand genommen. Statt dessen analysieren wir in der Folge ein Programm exemplarisch, in der Hoffnung, dem Leser dadurch den Zugang zu den übrigen Programmen etwas zu erleichtern.
Die Anlage des Programms 55 ist in der Abbildung auf S. 104 dargestellt: Entsprechend den Rechenvorschriften für eine 1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen (vgl. S.82 ) werden zunächst die Werte von p und q (= Anzahl der Faktorstufen und der Versuchspersonen) eingegeben (1.). Das Programm speichert diese Werte für weitere Berechnungen. Sodann werden alle X (alle Meßwerte der Varianzanalyse) zeilenweise eingetastet (2.). Das Programm prüft selbständig nach jeder Eingabe, ob eine Meßserie abgeschlossen ist: Solange dies nicht der Fall ist, läuft es in einer Schleife zurück und ist bereit für die Eingabe des nächsten X-Wertes. Ist eine Serie vollständig, werden zunächst einige zusätzliche Werte berechnet. Dann kehrt das Programm ebenfalls in einer Schleife wieder zurück, um weitere X-Werte zu verarbeiten. Sofern die Werte zeilenweise eingegeben werden, braucht man also nicht darauf zu achten, wann eine neue Serie von Messungen beginnt. Es folgt dann schließlich die Eingabe der Faktorstufensummen (3.), die vom Programm quadriert und gespeichert werden.
Nach dem Abschluß der Eingaben können die Quadratsummen berechnet werden: Zunächst ermittelt das Programm die dafür nötigen Kennziffern. Bei der Berechnung der Quadratsummen wird der Umstand ausgenutzt, daß für die $QS_{zwVpn}$, die $QS_{treat}$ und die $QS_{tot}$ jeweils die Kennziffer 1 von einer anderen abgezogen werden muß. Dieser sich dreimal wiederholende Vorgang ist als Unterprogramm ausgegliedert (5.), das immer dann aufgerufen wird und abläuft, wenn die genannte Subtraktion erforderlich ist. Da das Ergebnis jeweils die gesuchte Quadratsumme ist, enthält das Unterprogramm auch noch den Befehl für einen Programmstop, damit das Resultat abgelesen werden kann. Die Berechnung der übrigen Quadratsummen erfolgt ausschließlich im Hauptteil des Programms (4.).
Anschließend an das Ablaufschema sind alle Befehle in der Standarddarstellung aufgelistet, welche über den gesamten Programmteil hinweg durchgehalten ist. Diese Befehle müssen der Reihe nach programmiert werden, damit der Rechengang in der beschriebenen Weise abläuft. Informieren Sie sich anhand der Bedienungsanleitung für Ihren Rechner, wie Sie Programme eingeben müssen. Löschen Sie sicherheitshalber zuvor den Programmspeicher. Die Teile 1., 2., 3., 4. und 5. sind in der Programmauflistung durch Überschriften gekennzeichnet. In der Regel beginnen Programmteile mit Labels. Besonders hervorgehoben sind lediglich Entscheidungsstellen (durch ein Sechseck) und der Aufruf von Unterprogrammen (durch ein Rechteck). Auf Entscheidungsstellen folgt eine sog. bedingte Verzweigung. D.h. es hängt von der Beantwortung einer "Frage" ab, ob ein Sprung im Programmablauf und zu welcher Stelle er erfolgt. In dem hier analysierten Beispiel wird eine solche Frage bei den Schritten 021 und 022 gestellt: Ist die Eingabe einer Meßserie abgeschlossen? Mathematisch lautet diese Prüfung: Ist die Anzahl der verarbeiteten X-Werte ein ganzzahliges Vielfaches von p ? Wird die Frage verneint, springt das Programm sofort wieder zu Label B' zurück. Wird sie bejaht, werden die in den Schritten 024 bis 034 programmierten Operationen durchgeführt, bevor ebenfalls ein Rücksprung zu Label B' erfolgt. Unbedingte Sprünge, Schleifen und Verzweigungen sind nicht besonders hervor-

gehoben. Man erkennt sie ohnedies unschwer an dem Befehl GTO bzw. GOTO (dem dann allerdings keine Entscheidungsstelle vorausgehen darf) in Verbindung mit einem Label oder einer Programmadresse. Z.B. enthalten die Schritte 035 und 036 des hier analysierten Programms den Befehl, in jedem Falle zu Label B' zurückzukehren. Ohne besondere Markierung sind schließlich auch Unterbrechungen des Programmablaufes ersichtlich: Sie befinden sich immer dort, wo ein R/S-Befehl steht. Es müssen dann entweder Daten in das Programm eingegeben werden (hier z.B. bei 013), es kann oder muß ein ganzer Programmteil wiederholt werden (hier z.B. bei 042), oder es sind Ergebnisse abzulesen (hier z.B. bei 077).

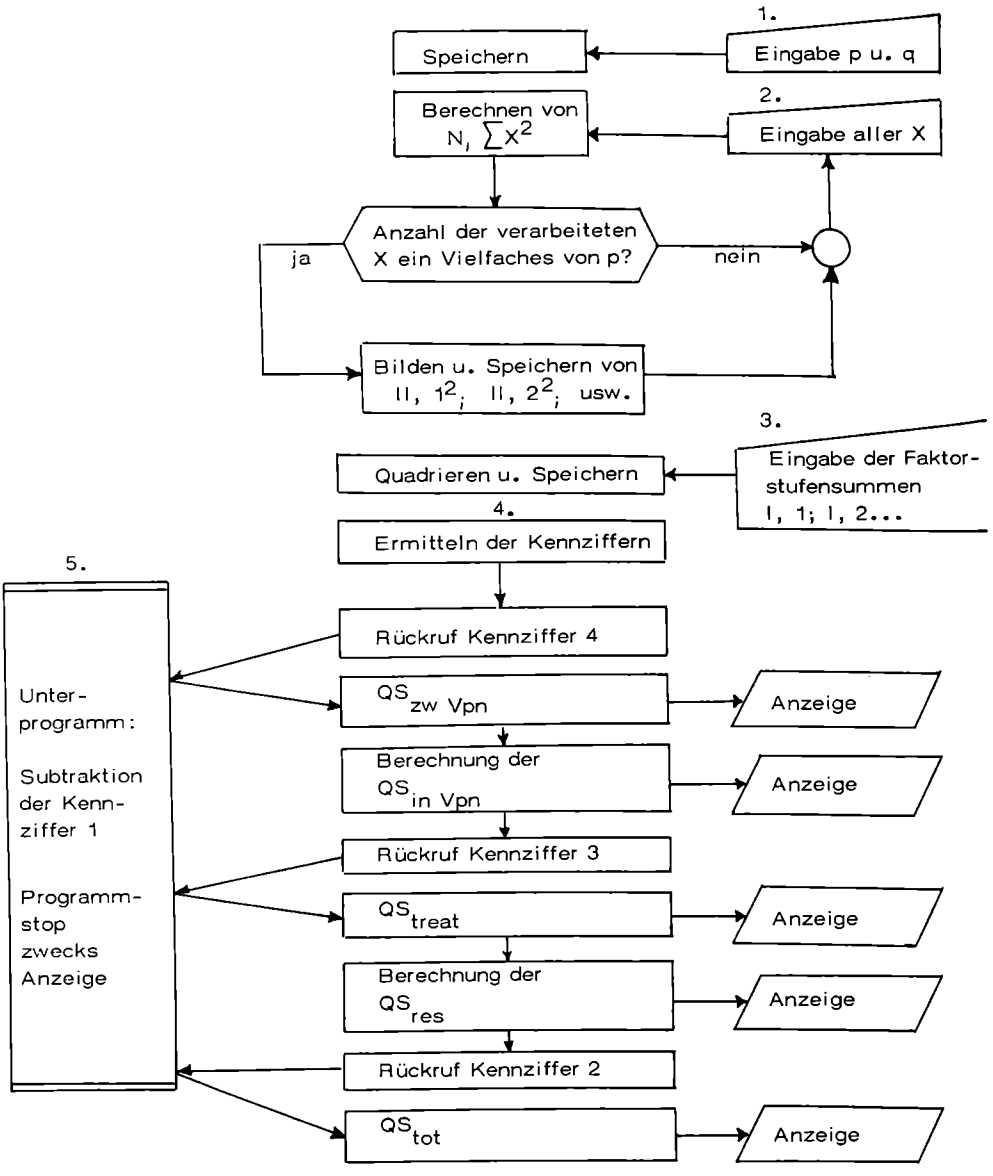
Einige Erläuterungen scheinen auch noch zum Verständnis der den Programmen jeweils in Tabellenform beigegebenen Bedienungsanleitungen angebracht:

In der linken Spalte ("Eingaben") lesen Sie, welche Werte in welcher Reihenfolge einzugeben sind. In der zweiten Spalte von links ("Tasten") sind die Tasten angegeben, welche zur Durchführung des Programms zu betätigen sind. In der rechts anschließenden Spalte ("Ergebnisse") ist aufgeführt, welche Ergebnisse nach welchen Tastenbefehlen erscheinen.

Die Bedienungsanleitung zu Programm 55 wäre in Worten folgendermaßen zu beschreiben:

Tasten Sie den Betrag von p ein und drücken Sie anschließend 2nd und A'.
Geben Sie den Betrag von q ein und drücken Sie die Taste R/S.
Dann geben Sie alle Werte von X (die Meßwerte der Varianzanalyse) ein, wobei Sie nach jeder Eingabe die R/S-Taste betätigen müssen. Die Werte sind dabei nach Zeilen geordnet einzugeben. Es ist nicht erforderlich, nach dem Ende einer Zeile eine besondere Taste zu drücken. Die Bedienungsanleitung würde sonst entsprechende Angaben enthalten.
Wenn Sie mit dieser Prozedur fertig sind, tasten Sie die Werte für die Faktorstufensummen 1,1 - 1,2 - 1,3 etc. ein, jeweils gefolgt von einem Druck auf die Taste A.
Damit ist der Eingabevorgang beendet: Für die folgenden Tasten enthält die Spalte "Eingaben" keine Anweisungen mehr.
Drücken Sie jetzt die Tasten 2nd und C'. Das Programm zeigt dann die $QS_{zwVpn}$ an (Spalte "Ergebnisse"). Auf jeweils einen Druck der Taste R/S erscheinen die übrigen Quadratsummen. Mit der Anzeige der $QS_{tot}$ ist das Programm beendet.
Vor der Anwendung eines Programms sollte man stets alle Speicher löschen. Sehen Sie in der Bedienungsanleitung Ihres Rechners nach, welche Manipulationen dazu erforderlich sind.
Die beiden rechten Spalten der meisten Programme enthalten Daten für eine Testrechnung. Sie sollten diese unbedingt durchführen, um sicherzugehen, daß Ihnen bei der Programmierung keine Fehler unterlaufen sind und daß Sie das Programm richtig bedienen. Geben Sie die Testdaten ein und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse anhand der abgedruckten Resultate. Stimmen sie überein, können Sie nach abermaliger Speicherlöschung mit Ihren Berechnungen beginnen. Für manche Programme (auch für das hier analysierte) ist wegen des Platzbedarfs für eine Testrechnung auf ein Rechenbeispiel im Textteil verwiesen, das Sie zur Prüfung verwenden können.

**Beispielanalyse für Programm 48**



**Programm 48**

**1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwertwiederholungen**

1. Vorbereitung

```
000 Lbl
    A'
    STO
    00
    STO
005 02
    R/S
    STO
    01
    GTO
010 B'
```

2. Dateneingabe I

```
011 Lbl
    B'
    R/S
    SUM
015 03
    SUM
    04
    x²
019 SUM
020 05
    (DSZ)
    0
    B'
    RCL
025 04
    x²
    SUM
    06
    0
030 STO
    04
    RCL
    02
    STO
035 00
    GTO
    B'
```

3. Dateneingabe II

```
038 Lbl
    A
040 x²
    SUM
    07
    R/S
```

4. Quadratsummen

```
044 Lbl
045 C'
    RCL
    03
    x²
    STO
050 03
    RCL
    02
    INV
    Prd
055 03
    INV
    Prd
    06
    RCL
060 01
061 INV
    Prd
    03
    INV
065 Prd
    07
    RCL
    06
    [SBR]
070 [1/x]
    RCL
    05
    -
    RCL
075 06
    =
    R/S
    RCL
    07
080 [SBR]
    [1/x]
    RCL
    05
    -
085 RCL
    07
    -
    RCL
    06
090 +
    RCL
    03
    =
    R/S
095 RCL
    05
    [SBR]
    [1/x]
```

5. Unterprogramm

```
099 Lbl
100 1/x
    -
    RCL
    03
    =
105 R/S
    INV SBR
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 2nd | A' | | Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.83 benützt werden. | |
| q | R/S | | | | |
| alle X (zeilenweise) | | | | | |
| I,1; I,2...I,p; | R/S | | | | |
| | A | | | | |
| | 2nd | C' | QS zw Vpn | | |
| | R/S | | QS in Vpn | | |
| | R/S | | QS treat I | | |
| | R/S | | QS res | | |
| | R/S | | QS tot | | |
| | | | | | |

# Programme in algebraischer Eingabelogik (AOS)

**Programm 1** (Theorie S. 1, 3 - 6, Formel 1, 2, 6 - 11, 14 - 19)
**Arithm. Mittel, Varianz, Standardabweichung (für tabellierte Daten[1])**

```
1. Daten
eingabe
000 Lbl
    A
    STO
    00
    x
005 R/S
    STO
    01
    SUM
    02
010 =
    SUM
    03
013 RCL
    00
015 x²
    x
    RCL
    01
    =
020 SUM
    04
    R/S
2. arithm.
Mittel
023 Lbl
    B
025 RCL
    03
    :
    RCL
    02
030 =
    R/S
3. Varianz
032 Lbl
    C
    RCL
035 04
    -
    RCL
    03
039 x²
040 :
    RCL
    02
    =
    STO
045 05
    :
    (
    RCL
    02
050 -
    1*
    )
053 =
    STO
055 06
    R/S
4. Standardabweichung
057 Lbl
    D
    RCL
060 06
    √x
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $IM_{1,2 \ldots n}$ [2] | A | | | Intervall | f | $\bar{X}$ = 5,667 |
| $f_{1,2 \ldots n}$ [2] | R/S | | | 0-2 | 2 | $SD_{N-1}$ = 4,000 |
| | B | | $\bar{X}$ | 3-5 | 3 | $V_{N-1}$ = 16,000 |
| | C | | V | 6-8 | 2 | $SD_N$ = 3,771 |
| | D | | SD | 9-11 | 1 | $V_N$ = 14,222 |
| | | | | 12-14 | 1 | |

[1]) Für Rohdaten sind diese Funktionen fest programmiert.
*) Falls $V_N$ und $SD_N$ erwünscht, ist hier 0 zu programmieren.
Eingabenreihenfolge IM, $f_1$, $IM_2$, $f_2$...

**Programm 2** (Theorie S. 2 f., Formel 5)
**Median, Quartile, Centile für maximal 40 Objekte bzw. Klassen**

```
1. Eingabe
v. Urdaten
000 Lbl
    A
    STO
    49
    1
005 SUM
    Ind 49
    .
    5 *)
    0 *)
010 SUM
    00
012 R/S
2. Eingabe
v. tab. Daten
013 Lbl
    B
015 STO
    49
017 R/S
    SUM
    Ind 49
020 x
    .
    5 *)
    0 *)
024 =
025 SUM
    00
    R/S
3. Median,
Quartile, Centile
028 Lbl
```

*) Bei anderen Centilen sind hier entsprechende andere Zahlen zu programmieren, z.B. 25 für C

```
029  C
030  1
     SUM
     46
     RCL
     Ind 46
035  SUM
     47
     RCL
     47
039  -
040  RCL
     00
     =
     STO
     48
045  x≥t
     D
     GTO
     0
049  30
050  R/S
     Lbl
     D
     RCL
     46
055  R/S
     -
     RCL
     48
059  :
060  RCL
     Ind 46
     x
     RCL
     44
065  =
     R/S
```

4. Speicher-vorbereitung

```
067  Lbl
068  E
     0
070  STO
     45
     STO
     46
     STO
075  47
     STO
     48
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 2ndOp | | a) Urdaten: | |
| | 1 | 7 | | 1; 1; 3; 4; 3; 3; | |
| Intervallbreite [1] | STO | | | 5; 7; 8; 5; 2; 6; | |
| | 4 | 4 | | 8; | Z = 4 |
| a) Urdaten: | | | | | |
| Codes [2] | A | | | | |
| | C | | Z | b) tab. Daten: | |
| b) tab. Daten | | | | | |
| Codes [2] | B | | | IC Intervall f | |
| f | R/S | | | 1 1-2,9 3 | |
| | C | | Code der | 2 3-4,9 4 | |
| | | | Klasse, in | 3 5-6,9 3 | |
| | | | welcher Z | 4 7-8,9 3 | Z = 4,663 |
| | | | liegt | | |
| Obergrenze die- | | | | | |
| ser Klasse | R/S | | Z | | |
| Speichervorbe- | | | | | |
| reitung vor dem | | | | | |
| Abfragen weiterer | | | | | |
| Quartile/Centile | E | | | | |

1) Bei Urdaten ist als Intervallbreite 1 einzugeben.
2) Es sind Codes von 1 bis 40 zulässig.

**Programm 3** (Theorie S. 7, Formel 25, 26)
**Schiefe und Exzeß**

1. Daten-eingabe

```
000  Lbl
     A
     STO
     00
004  R/S
005  STO
     01
     R/S
     Lbl
     B
010  STO
     02
     R/S
     STO
     03
015  RCL
016  02
     -
     RCL
     00
020  =
     :
022  RCL
     01
     =
025  STO
     07
     INV
```

```
028 (x≥t)
    A'
030 Y^x
    3
    =
    GTO
    B'
035 R/S
    Lbl
    A'
    +/-
039 Y^x
040 3
    =
    +/-
    GTO
    B'
045 R/S
    Lbl
    B'
    x
    RCL
050 03
    =
    SUM
    04
    RCL
055 07
    IXI
    Y^x
    4
    x
060 RCL
    03
062 SUM
    05
    =
065 SUM
    06
    R/S
```

2. Schiefe u. Exzeß

```
068 Lbl
    C
070 RCL
    05
072 INV
    Prd
    04
075 INV
    Prd
    06
    RCL
    04
080 R/S
    RCL
    06
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$<br>$SD_x$<br>$IM_{1,2\ldots m}$ [1]<br>$f_{1,2\ldots m}$ [1] | A<br>R/S<br>B<br>R/S<br>C<br>R/S | Schiefe<br>Exzeß | 10, 141<br>5,039<br>Interv. f<br>0-4 12<br>5-9 23<br>10-14 25<br>15-19 18 | Schiefe =<br>-0, 122<br>Exzeß =<br>1,891 |

1) Eingabereihenfolge: $IM_1$, $f_1$, $IM_2$, $f_2$ etc.

**Programm 4** (Theorie S. 8, Formel 27)
**Prozentränge für maximal 40 Objekte bzw. Klassen**

1. Eingabe v. Urdaten

```
000 Lbl
    A
    STO
    49
    1
005 SUM
    48
    SUM
    Ind 49
    R/S
```

2. Eingabe v. tab. Daten

```
010 Lbl
    B
012 STO
    49
    R/S
015 SUM
    Ind 49
    SUM
    48
    R/S
```

3. Prozentränge

```
020 Lbl
    C
    STO
    45
    STO
025 47
026 RCL
    Ind 47
    SUM
    46
030 RCL
    47
    -
    1
    =
035 (x=t)
    D
    1
    INV
    SUM
040 47
    GTO
042 0
    26
    R/S
045 Lbl
    D
    RCL
    46
    :
050 RCL
    48
    x
    RCL
    41
055 -
    RCL
    Ind 45
058 :
    2
060 :
    RCL
    48
    x
    RCL
065 41
    =
    R/S
    0
    STO
070 45
    STO
    46
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| | 5 | 2ndOp | | a) Urdaten: | |
| | 1 | 7 | | 1;1;3;4;3; | |
| Intervallbreite[1] | STO | 00 | | 3;5;7;8;8; | |
| 100 | STO | 41 | | 5;2;6; | |
| a) Urdaten: | | | | PR von 3 | PR = 34,62 |
| Codes[2] $(C)_{1,2...n}$ | A | | | b) tab. Daten: | |
| C des X-Wertes, | | | | | |
| f. den ein PR ge- | | | | C Intervall f | |
| sucht wird | C | | PR | 1 1-2,9 3 | |
| b) tab. Daten: | | | | 2 3-4,9 1 | |
| Codes[2] (C) | B | | | 3 5-6,9 2 | |
| f | R/S | | | 4 7-8,9 4 | |
| C des X-Wertes, | | | | 5 9-10,9 0 | |
| f. den ein PR ge- | | | | 6 11-12,9 2 | |
| sucht wird | C | | PR | PR von C = 4 | PR = 66,67 |
| vor Aufruf eines | | | | | |
| weiteren PR | R/S | | | | |

1) Bei Urdaten ist als Intervallbreite 1 einzugeben.
2) Es sind Codes von 1 bis 40 zulässig.

**Programm 5/6** (Theorie S. 8, Formel 28)
**Standardisierung von Verteilungen**

1. Eingabe v. Urdaten
000 Lbl
A
SUM
00
$x^2$
005 SUM
01
1
SUM
02
010 R/S

2. Eingabe v. tab. Daten
011 Lbl
B
STO
03
015 x
016 R/S
STO
04
SUM
020 02
=
SUM
00
RCL
025 03
$x^2$
x
RCL
04
030 =
SUM
01
R/S

3. Standardisierungsvorbereitung
034 Lbl
035 C
RCL
00
:
RCL
040 02
=
STO
05
RCL
045 00
$x^2$
:
RCL
02
050 =
INV
SUM
01
RCL
055 02
-
1
=
INV
060 Prd
01
RCL
01
$\sqrt{x}$
065 STO
06
R/S

4. z-Werte
068 Lbl
D
070 -
RCL
05
=
:
074 RCL
075 06
=
R/S

5. x-Werte
078 Lbl
E
080 x
RCL
06
+
RCL
085 05
=
R/S

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| a) Urdaten: alle X | | | a) Urdaten: 5; 3; 2; 1; 7; 0; 8; 4; 6; 3; 6; 12; | |
| | A | | $X_i$ = 0; $z_i$ = 2 | $z_i$ = -1,425 |
| | C | | | $X_i$ = 11,417 |
| b) tab. Daten: | | | b) tab. Daten: | |
| $IM_{1,2...m}$ 1) | | | t | |
| $f_{1,2...m}$ 1) | B | | 0-2 3 | |
| | R/S | | 3-5 4 | |
| | C | | 6-8 4 | |
| $X_i$ (Int.Mitte) | D | $z_i$ | 9-11 0 | |
| $z_i$ | E | $X_i$ | 12-14 1 | |
| | | | $X_i$ = 0 | $z_i$ = 1,443 |
| | | | $z_i$ = 2 | $X_i$ = 11,928 |

1) Eingabereihenfolge: $IM_1$, $f_1$, $IM_2$, $f_2$ etc.

**Programm 7** (Theorie S. 10, Formel 30)
**Binomialverteilung**

1. Dateneingabe

```
000  Lbl
     A
     STO
     00
     -
005  R/S
     STO
     01
     =
     STO
010  02
     1
     -
     R/S
     STO
015  03
```

2. Berechnung v. p(x)

```
016  =
     STO
     04
     RCL
020  03
     Y^x
     RCL
     01
     =
025  STO
     03
     RCL
     04
     Y^x
030  RCL
     02
     =
     Prd
     03
035  SBR
     x^2
     STO
     04
     RCL
040  00
     STO
     01
     SBR
     x^2
045  STO
     00
     RCL
     02
     STO
050  01
     SBR
     x^2
     x
     RCL
055  04
     =
     INV
     Prd
     00
060  RCL
     00
     x
     RCL
     03
065  =
     R/S
```

3. Unterprogramm "Fakultät"

```
067  Lbl
     x^2
     RCL
070  01
071  (x=t)
     √x
     Lbl
     1/x
075  RCL
     01
     x
     (DSZ)
     1
080  1/x
     Lbl
     √x
     1
     =
085  INVSBR
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| N | [A] [ ] | | N = 10 | |
| k | [R/S] [ ] | | k = 7 | |
| p | [R/S] [ ] | p(x) | p = 0,5 | p(x) = 0,1172 |
| | [ ] [ ] | | | |

**Programm 8** (Theorie S. 11, Formel 31)
**Poissonverteilung**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Daten | | 2. Ermitt- | | 021 | $Y^x$ | 033 | RCL | 044 | 03 |
| eingabe | | lung v.p(x) | | | RCL | | 01 | 045 | RCL |
| 000 | Lbl | 010 | 1 | | 01 | 035 | x | | 04 |
| | A | | INV | | = | | (DSZ) | | : |
| | : | | Lnx | 025 | STO | | 1 | | RCL |
| | R/S | | $Y^x$ | | 04 | | B' | | 02 |
| | = | | RCL | | RCL | | Lbl | 050 | : |
| 005 | STO | 015 | 00 | | 01 | 040 | A' | | RCL |
| | 00 | | = | | (x=t) | | 1 | | 03 |
| | R/S | | STO | 030 | A' | | = | | = |
| | STO | | 02 | | Lbl | | STO | | R/S |
| | 01 | | RCL | | B' | | | | |
| | | 020 | 00 | | | | | | |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| f | [A] [ ] | | f = 319[1] | |
| N | [R/S] [ ] | | N = 2450 | |
| k | [R/S] [ ] | p(X) | k = 5 | p(X) = 0,0000002738 |
| | [ ] [ ] | | | |

1) f ist die Häufigkeit mit welcher das seltene Ereignis unter N Fällen auftritt.

**Programm 9** (Theorie S. 14 f., Formel 36)
**Normalitätsprüfung**

1. Vorbereitung
000 Lbl
A
STO
00
R/S
005 STO
01
R/S
STO
02
010 R/S

2. erwartete Häufigkeiten
011 Lbl
012 B
SBR
E
015 R/S
STO
03
R/S
SBR
020 E
R/S
-
RCL
03
025 =
IXI
×
RCL
029 02
030 =
R/S
Lbl
C
SBR
035 E
R/S
+/-
+
.
040 5
=
×
RCL
02
045 =
046 R/S

3. CHI-Quadrat
047 Lbl
D
-
050 R/S
STO
03
=
$x^2$
055 :
RCL
03
=
SUM
060 04
R/S

4. Unterprogramm: z-Wert
062 Lbl
E
-
065 RCL
00
=
:
RCL
070 01
=
INV SBR

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}$ | A | | | $\bar{X}$ = 9,1 | | |
| $SD_x$ | R/S | | | $SD_x$ = 4,749 | | |
| N | R/S | | | N = 100 | | |
| Intervalle 2 bis | | | | | | |
| n-1: | | | | | | |
| Untergrenze | B | | $z_{+/-}$ | Intervall | $f_b$ | |
| $F_{+/-}$ 1) | R/S | | | 1-5,9 | 25 | 25,14 |
| Obergrenze | R/S | | $z_{+/-}$ | 6-10,9 | 38 | 39,02 |
| $F_{+/-}$ 1) | R/S | | fe | 11-15,9 | 31 | 26,82 |
| 1.u. letztes | | | | 16-20,9 | 6 | 7,35 |
| Intervall: | | | | | | |
| Obergrenze 1./ | | | | | | |
| Untergrenze | | | | | | |
| letztes Intervall | C | | z | | | |
| \|F\| | R/S | | | | | $Chi^2$ = 0,927 |
| beob.Häufigkeit | D | | | | | |
| erw. Häufigkeit | R/S | | | | | |
| | RCL | 0 4 | $Chi^2$ | | | |

1) F zu z in Tab. 1 nachschlagen und mit dem Vorzeichen von z eingeben.

**Programm 10** (Theorie S. 19, Formel 48)
**Unterschied von Prozentangaben**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 011 | R/S | 022 | 0 | 033 | 01 | 044 | RCL |
| | A | | STO | | 0 | | × | 045 | 04 |
| | STO | | 03 | | - | | ( | | = |
| | 00 | | R/S | 025 | RCL | | 1 | | $\sqrt{x}$ |
| | - | 015 | STO | | 00 | | 0 | | INV |
| 005 | R/S | | 04 | | ) | | 0 | | Prd |
| | STO | | RCL | | : | | - | 050 | 02 |
| | 01 | | 00 | | RCL | 040 | RCL | | RCL |
| | = | | × | 030 | 03 | | 01 | | 02 |
| | STO | 020 | ( | | + | | ) | | R/S |
| 010 | 02 | | 1 | | RCL | | : | | |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $p_1$ | A | | $p_1$ = 4,8 | |
| $p_2$ | R/S | | $p_2$ = 17,0 | |
| $N_1$ | R/S | | $N_1$ = 386 | |
| $N_2$ | R/S | CR | $N_2$ = 245 | CR = -4,63 |

**Programm 11** (Theorie S. 20, Formel 49)
**t-Test für unabhängige Stichproben**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 005 | STO | 010 | R/S | 015 | R/S | 020 | 00 |
| | A | | 00 | | + | | = | | RCL |
| | - | | R/S | | R/S | | $\sqrt{x}$ | | 00 |
| | R/S | | $x^2$ | | $x^2$ | | INV | | R/S |
| | = | | : | | : | | Prd | | |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}_1$ | A | | 5,48 | |
| $\bar{X}_2$ | R/S | | 3,27 | |
| $SD_1$ | R/S | | 7,20 | |
| $N_1$ | R/S | | 215 | |
| $SD_2$ | R/S | | 9,14 | |
| $N_2$ | R/S | t | 307 | t = 3,08 |

**Programm 12** (Theorie S. 21, Formel 53)
**t-Test für abhängige Stichproben**

1. Daten-
eingabe

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | - |
| | R/S |
| | = |
| 005 | SUM |
| | 00 |
| | $x^2$ |
| 008 | SUM |
| | 01 |
| 010 | 1 |
| | SUM |
| | 02 |
| | R/S |

2. Berechnung
von t

| | |
|---|---|
| 014 | Lbl |
| 015 | B |
| | RCL |
| | 02 |
| | - |
| | 1 |
| 020 | = |
| | $\sqrt{x}$ |
| | x |
| | RCL |
| | 00 |
| 025 | = |
| | STO |
| | 03 |
| | RCL |
| | 01 |
| 030 | x |
| | RCL |
| | 02 |
| | - |
| | RCL |
| 035 | 00 |
| | $x^2$ |
| | = |
| | $\sqrt{x}$ |
| | INV |
| 040 | Prd |
| | 03 |
| | RCL |
| | 03 |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2 \ldots n}$ [1] | A | | X = 5; 4; 2; 6; | |
| $X'_{1,2 \ldots n}$ [1] | R/S | | X' = 2; 3; 5; 6; | |
| | B | t | | t = 0,20 |

1) Eingabereihenfolge $X_1$, $X'_1$, $X_2$, $X'_2$ etc.

**Programm 13** (Theorie S. 23, Formel 57)
**z-Wert für U-Test mit unverbundenen Rängen**

1. Daten
eingabe

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | STO |
| | 00 |
| | x |
| 005 | R/S |
| | STO |
| | 01 |
| | = |
| 009 | STO |
| 010 | 03 |
| | R/S |
| | STO |
| | 04 |

2. Berechnung
von z

| | |
|---|---|
| 014 | RCL |
| 015 | 00 |
| | + |
| 017 | RCL |
| | 01 |
| | + |
| 020 | 1 |
| | = |
| | STO |
| | 05 |
| | x |
| 025 | RCL |
| | 03 |
| | : |
| 028 | 3 |
| | = |
| 030 | $\sqrt{x}$ |
| | STO |
| | 03 |
| | RCL |
| | 00 |
| 035 | x |
| | RCL |
| | 05 |
| | - |
| 039 | 2 |
| 040 | x |
| | RCL |
| | 04 |
| | = |
| | : |
| 045 | RCL |
| | 03 |
| | = |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | A | | $n_1$ = 8 | |
| $n_2$ | R/S | | $n_2$ = 14 | |
| $T_1$ | R/S | z | $T_1$ = 73 | z = 1,297 |

**Programm 14** (Theorie S. 24, Formel 58)
**z-Wert für U-Test mit verbundenen Rängen**

1. Daten-
eingabe
000 Lbl
A
STO
00
R/S
005 STO
01
R/S
STO
02
010 GTO
B
Lbl
B
R/S
015 STO
03
017 $Y^x$
3
-
020 RCL
03
=
SUM
04
025 GTO
B

2. Berechnung z
027 Lbl
C
RCL
030 00
×
(
CE
034 +
035 RCL
01
+
1
)
040 -
2
×
RCL
02
045 =
STO
03
RCL
00
050 +
RCL
01
053 =
STO
055 05
-
1
=
×
060 3
×
RCL
05
:
065 RCL
00
:
RCL
01
070 :
(
072 RCL
05
$Y^x$
075 3
-
RCL
05
-
080 RCL
04
)
=
$\sqrt{x}$
085 ×
RCL
03
=
R/S

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | A | | $n_1 = 9$ | |
| $n_2$ | R/S | | $n_2 = 28$ | |
| $T_1$ | R/S | | $T_1 = 248$ | |
| alle Rgl[1] | R/S | | Rgl = 2;4;3 | |
| | C | z | | z = -2,728 |

1) Rgl ist die Anzahl der Objekte mit jeweils gleichem Rangplatz.

**Programm 15** (Theorie S. 26 f., Formel 62)
**Wilcoxen-Test**

1. Daten
eingabe
000 Lbl
A
-
R/S
STO
005 00

2. Berechnung
von CR
006 ×
007 (
CE
+
010 1
)
:
4
=
015 STO
016 01
RCL
00
×
020 (
CE
+
1
)
025 ×
026 (
2
×
RCL
030 00
+
1
)
:
035 2
036 4
=
$\sqrt{x}$
INV
040 Prd
01
RCL
01
R/S

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| $T_w$<br>n | A<br>R/S | CR | $T_w$ = 50<br>n = 8 | CR = 4,481 |

**Programm 16** (Theorie S. 27, Formel 63)
**Vorzeichen-Test für N ≤ 25**

1. Dateneingabe

```
000  Lbl
     A
     STO
     00
     R/S
005  STO
     01
```

2. Berechnung von p

```
007  SBR
     B
     STO
010  02
     RCL
012  00
     -
     RCL
015  01
     =
     SBR
     B
     Prd
020  02
     RCL
     00
     SBR
     B
025  INV
     Prd
     02
029  5
030  Y^x
     RCL
     01
     x
     .
035  5
     Y^x
     (
     RCL
     00
040  -
     RCL
     01
     )
     x
045  RCL
046  02
     1/x
     =
     R/S
```

3. Unterprogramm "Fakultät"

```
050  Lbl
     B
     x=t
     A'
     STO
055  03
     1
     STO
     04
     GTO
060  B'
     Lbl
     A'
     1
     INV SBR
065  Lbl
     B'
     RCL
     03
     Prd
070  04
     DSZ
     3
     B'
     RCL
075  04
     INV SBR
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| N<br>F | A<br>R/S | p | N = 24<br>F = 7 | p = 0,0206 |

**Programm 17** (Theorie S. 29 f., Formel 65)
**4-Felder-Chi-Quadrat**

```
1. Daten-
eingabe
000 Lbl
    A
    STO
    00
    +
005 R/S
    STO
    01
    +
    R/S
010 STO
    02
    +
013 R/S
    STO
015 03

2. Ermittlung
des Chi²
016 =
    STO
    04
    RCL
020 04
    x
    (
    RCL
    00
025 x
    RCL
    03
    -
    RCL
030 01
    x
    RCL
    02
    )
035 x²
    :
    (
    RCL
    00
040 +
    RCL
    01
    )
    :
045 (
    RCL
    02
    +
    RCL
050 03
    )
    :
    (
    RCL
055 00
    +
    RCL
    02
    )
060 :
    (
    RCL
    01
    +
065 RCL
    03
    )
    =
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| a | A | | a = 4 | |
| b | R/S | | b = 14 | |
| c | R/S | | c = 28 | |
| d | R/S | $Chi^2$ | d = 28 | $Chi^2$ = 4,282 |

**Programm 18** (Theorie S. 30 f., Formel 32, 66)
**Kontingenztafel für maximal 24 Zeilen**

```
1. Zeilen-
summen
000 Lbl
    A
    1
    STO
    00
005 GTO
    A'
    Lbl
    A'
    R/S
010 SUM
011 29
    STO
    Ind 00
    1
015 SUM
    00
    GTO
    A'

2. Spalten-
summe
019 Lbl
020 B
    STO
022 28
    1
    STO
025 00
    GTO
    B'

3. Zellen
028 Lbl
    B'
030 R/S
    STO
    25
    RCL
034 28
035 x
    RCL
    Ind 00
    :
    RCL
040 29
    =
    STO
    27
    -
045 RCL
    25
047 =
    x²
    :
050 RCL
    27
    =
    SUM
    26
055 1
    SUM
    00
    GTO
    B'
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung |
|---|---|---|---|
| alle Zeilen-summen $Sp\sum_{1,2\ldots n}$ [1] $f_{Zellen_{1,2\ldots n}}$ [1] | A<br>R/S<br>B<br>R/S<br>RCL<br>2 6 | $Chi^2$ | Zs<br>8 7 9 24<br>4 3 5 12<br>6 2 3 11<br>3 4 4 11<br>Sps 21 16 21 58 $Chi^2$=2,409 |

1) Eingabereihenfolge: Spaltensumme$_1$, alle $f_{Zellen}$ dieser Spalte, Spaltensumme$_2$ etc.

**Programm 19** (Theorie S. 33, Formel 69)
**Cochran-Test**

1. Daten-eingabe

```
000 Lbl
    A
    SUM
    00
    x²
005 SUM
    01
    R/S
008 Lbl
    B
010 SUM
    02
    x²
    SUM
    03
015 R/S
    Lbl
    C
018 STO
    04
```

2. Berechnung von $Chi^2$

```
020 -
    1
    =
    x
    (
    RCL
    04
    x
    RCL
    01
030 -
    RCL
    00
    x²
    )
035 :
    (
    RCL
    04
    x
040 RCL
    02
    -
    RCL
    03
045 )
    =
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle U<br>alle Zeilen-summen<br>k | A<br>B<br>C | $Chi^2$ | U = 3;2;1;<br>Zs=2;2;2;<br>k = 3 | $Chi^2$ = 2,0 |

**Programm 20** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 3 alternative Merkmale**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 014 | 0 | 028 | GTO | 042 | 06 | 055 | 06 |
| | A | 015 | 20 | | 0 | | GTO | | RCL |
| | 1 | | RCL | 030 | 35 | | 0 | | 06 |
| | STO | | 01 | | RCL | 045 | 50 | | - |
| | 06 | | Prd | | 03 | | RCL | | R/S |
| 005 | R/S | | 06 | | Prd | | 05 | 060 | = |
| | x=t | 020 | R/S | | 06 | | Prd | | $x^2$ |
| | 0 | | x=t | 035 | R/S | | 06 | | : |
| | 16 | | 0 | | x=t | 050 | RCL | | RCL |
| | RCL | | 31 | | 0 | | 08 | | 06 |
| 010 | 00 | | RCL | | 46 | | $x^2$ | 065 | = |
| | Prd | 025 | 02 | | RCL | | INV | | SUM |
| | 06 | | Prd | 040 | 04 | | Prd | | 07 |
| | GTO | | 06 | | Prd | | | | R/S |

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma A_1$ | STO | 00 | | 400 | |
| $\Sigma A_0$ | STO | 01 | | 300 | |
| $\Sigma B_1$ | STO | 02 | | 200 | |
| $\Sigma B_0$ | STO | 03 | | 600 | |
| $\Sigma C_1$ | STO | 04 | | 500 | |
| $\Sigma C_0$ | STO | 05 | | 100 | |
| N | STO | 08 | | 1000 | |
| | A | | | | |
| 1.KZ der Konf.[1] | R/S | | | | |
| 2.KZ der Konf.[1] | R/S | | | | fe 101 = 120,00 |
| 3.KZ der Konf.[1] | R/S | | fe | | |
| fb | R/S | | Chi²-Komponente | fb = 140 | Chi²-Komp. = 3,333 |
| | | | | | |
| vor jeder neuen Konf. | | | | | |
| | A | | | | |
| | RCL | 07 | Gesamt-Chi² | | |
| | | | | | |

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (1 oder 0)

**Programm 21** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 4 alternative Merkmale**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 018 | Prd | 036 | x=t | 053 | 61 | 070 | INV |
| | A | | 09 | | 0 | | RCL | | Prd |
| | 1 | 020 | R/S | | 46 | 055 | 06 | | 09 |
| | STO | | x=t | | RCL | | Prd | | RCL |
| | 09 | | 0 | 040 | 04 | | 09 | | 09 |
| 005 | R/S | | 31 | | Prd | | GTO | 075 | - |
| | x=t | | RCL | | 09 | | 0 | | R/S |
| | 0 | 025 | 02 | | GTO | 060 | 65 | | = |
| | 16 | | Prd | | 0 | | RCL | | $x^2$ |
| | RCL | | 09 | 045 | 50 | | 07 | | : |
| 010 | 00 | | GTO | | RCL | | Prd | 080 | RCL |
| | Prd | | 0 | | 05 | | 09 | | 09 |
| | 09 | 030 | 35 | | Prd | 065 | RCL | | = |
| | GTO | | RCL | | 09 | | 08 | | SUM |
| | 0 | | 03 | 050 | R/S | | $Y^x$ | | 10 |
| 015 | 20 | | Prd | | x=t | | 3 | 085 | R/S |
| | RCL | | 09 | | 0 | | = | | |
| | 01 | 035 | R/S | | | | | | |

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma A_1$ | STO | 00 | | 600 | |
| $\Sigma A_0$ | STO | 01 | | 300 | |
| $\Sigma B_1$ | STO | 02 | | 500 | |
| $\Sigma B_0$ | STO | 03 | | 400 | |
| $\Sigma C_1$ | STO | 04 | | 200 | |
| $\Sigma C_0$ | STO | 05 | | 700 | |
| $\Sigma D_1$ | STO | 06 | | 100 | |
| $\Sigma D_0$ | STO | 07 | | 900 | |
| N | STO | 08 | | 1000 | Konfig. 1010: |
| vor jeder Konfi- | | | | | fe = 43,20 |
| guration | A | | | | |
| 1. KZ der Konf.[1] | R/S | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | |
| 4. KZ der Konf.[1] | R/S | | fe | fb = 50 | $Chi^2$-Komp. = |
| fb | R/S | | $Chi^2$-Kom- | | 1,07 |
| | | | ponente | | |
| | RCL | 10 | Gesamt- | | |
| | | | $Chi^2$ | | |

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (1 oder 0)

**Programm 22** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 5 alternative Merkmale**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 020 | R/S | 040 | 04 | 060 | 65 | 080 | RCL |
| | A | | x=t | | Prd | | RCL | | 10 |
| | 1 | | 0 | | 11 | | 07 | | $Y^x$ |
| | STO | | 31 | | GTO | | Prd | | 4 |
| | 11 | | RCL | | 0 | | 11 | | = |
| 005 | R/S | 025 | 02 | 045 | 50 | 065 | R/S | 085 | INV |
| | x=t | | Prd | | RCL | | x=t | | Prd |
| | 0 | | 11 | | 05 | | 0 | | 11 |
| | 16 | | GTO | | Prd | | 76 | | RCL |
| | RCL | | 0 | | 11 | | RCL | | 11 |
| 010 | 00 | 030 | 35 | 050 | R/S | 070 | 08 | 090 | - |
| | Prd | | RCL | | x=t | | Prd | | R/S |
| | 11 | | 03 | | 0 | | 11 | | = |
| | GTO | | Prd | | 61 | | GTO | | $X^2$ |
| | 0 | | 11 | | RCL | | 0 | | : |
| 015 | 20 | 035 | R/S | 055 | 06 | 075 | 80 | 095 | RCL |
| | RCL | | x=t | | Prd | | RCL | | 11 |
| | 01 | | 0 | | 11 | | 09 | | = |
| | Prd | | 46 | | GTO | | Prd | | SUM |
| | 11 | | RCL | | 0 | | 11 | | 12 |
| | | | | | | | | 100 | R/S |

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma A_1$ | STO | 00 | | 300 | |
| $\Sigma A_0$ | STO | 01 | | 600 | |
| $\Sigma B_1$ | STO | 02 | | 400 | |
| $\Sigma B_0$ | STO | 03 | | 200 | |
| $\Sigma C_1$ | STO | 04 | | 1200 | |
| $\Sigma C_0$ | STO | 05 | | 800 | |
| $\Sigma D_1$ | STO | 06 | | 350 | |
| $\Sigma D_0$ | STO | 07 | | 700 | |
| $\Sigma E_1$ | STO | 08 | | 1500 | |
| $\Sigma E_0$ | STO | 09 | | 500 | |
| N | STO | 10 | | 2000 | |
| vor jeder Konfiguration | | | | | Konfiguration 01101: |
| | A | | | | |
| 1. KZ der Konf.[1] | R/S | | | | fe = 18,9 |
| ⋮ | ⋮ | | | | $Chi^2$-Komponente= 0,89 |
| 5. KZ der Konf.[1] | R/S | | fe | | |
| fb | R/S | | $Chi^2$-Komponente | fb = 23 | |
| | | | | | |
| | RCL | 12 | Gesamt-$Chi^2$ | | |
| | | | | | |

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (1 oder 0)

**Programm 23** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 3 dreifach gestufte Merkmale**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 022 | RCL | 044 | 05 | 066 | 1 | 087 | Prd |
| | A | | 00 | 045 | Prd | | = | | 10 |
| | 1 | | Prd | | 10 | | x=t | | RCL |
| | STO | 025 | 10 | | GTO | | 0 | 090 | 09 |
| | 10 | | GTO | | 0 | 070 | 85 | | $x^2$ |
| 005 | R/S | | 0 | | 61 | | RCL | | INV |
| | x=t | | 33 | 050 | RCL | | 08 | | Prd |
| | 0 | | RCL | | 03 | | Prd | | 10 |
| | 22 | 030 | 01 | | Prd | | 10 | 095 | RCL |
| | - | | Prd | | 10 | 075 | GTO | | 10 |
| 010 | 1 | | 10 | | GTO | | 0 | | - |
| | = | | R/S | 055 | 0 | | 89 | | R/S |
| | x=t | | x=t | | 61 | | RCL | | = |
| | 0 | 035 | 0 | | RCL | | 06 | 100 | $x^2$ |
| | 29 | | 50 | | 04 | 080 | Prd | | : |
| 015 | RCL | | - | | Prd | | 10 | | RCL |
| | 02 | | 1 | 060 | 10 | | GTO | | 10 |
| | Prd | | = | | R/S | | 0 | | = |
| | 10 | 040 | x=t | | x=t | | 89 | 105 | SUM |
| | GTO | | 0 | | 0 | 085 | RCL | | 11 |
| 020 | 0 | | 57 | | 78 | | 07 | | R/S |
| | 33 | | RCL | 065 | - | | | | |

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma A_0$ | STO | 00 | | 50 | |
| $\Sigma A_1$ | STO | 01 | | 400 | |
| $\Sigma A_2$ | STO | 02 | | 300 | |
| $\Sigma B_0$ | STO | 03 | | 200 | |
| $\Sigma B_1$ | STO | 04 | | 100 | |
| $\Sigma B_2$ | STO | 05 | | 700 | |
| $\Sigma C_0$ | STO | 06 | | 500 | |
| $\Sigma C_1$ | STO | 07 | | 150 | |
| $\Sigma C_2$ | STO | 08 | | 250 | |
| N | STO | 09 | | 1000 | |
| vor jeder Konfiguration | | | | | Konfiguration 102: |
| | A | | | | fe = 20,0 |
| 1.KZ der Konf.[1] | R/S | | | | |
| ⋮ | ⋮ | | | | |
| 3.KZ der Konf.[1] | R/S | | fe | | |
| fb | R/S | | $Chi^2$-Komponente | fb = 32 | $Chi^2$-Komponente= 7,20 |
| | | | | | |
| | RCL | 11 | Gesamt-$Chi^2$ | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration (0, 1 oder 2)

**Programm 24** (Theorie S. 38, Formel 77)
**Produkt-Moment-Korrelation für TI 57** *

1. Dateneingabe

000 R/S
SUM 1
$x^2$
SUM 2
x
005 R/S
SUM 4
$x^2$
008 SUM 5
=
010 $\sqrt{x}$
SUM 6
1
SUM 7
RST

2. Berechnung von r

015 RCL 7
016 $\sqrt{x}$
INV Prd 1
INV Prd 4
RCL 1
020 x
RCL 4
=
INV SUM 6
RCL 1
025 $x^2$
026 INV SUM2
RCL 4
$x^2$
INV SUM 5
030 RCL 5
Prd 2
RCL 2
$\sqrt{x}$
034 INV Prd6
035 RCL 6
R/S

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2...n}$ 1) | RST | R/S | | X = 4;3;5;8; | |
| $Y_{1,2...n}$ 1) | R/S | | | Y = 4;6;1;7; | |
| | R/S | | | | |
| | GTO | 15 | | | |
| | R/S | | r | | r = 0,292 |

*) Auf dem TI 58/59 ist diese Funktion fest programmiert.
1) Eingabereihenfolge $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 25** (Theorie S. 38, Formel 77)
**Korrelationsmatrix für 6 Variablen**

1. Dateneingabe

000 Lbl
A
6
STO
33
005 1
2
STO
34
R/S
010 SBR
$^1/_x$
012 R/S
SBR
$^1/_x$
015 R/S
SBR
$^1/_x$
R/S
SBR
020 $^1/_x$
R/S
SBR
$^1/_x$
R/S
025 SBR
026 $^1/_x$
1
8
STO
030 36
0
STO
33
1
035 STO
34
5
STO
35
040 SBR
$x^2$
1
STO
33
045 2
STO
34
4
STO
050 35
SBR
$x^2$
2
054 STO
055 33
3
STO
34
3
060 STO
35
SBR
$x^2$
3
065 STO
33
4

```
068  STO
     34
070  2
     STO
     35
     SBR
     x²
075  4
     STO
     33
     5
     STO
080  34
     1
     STO
     35
     SBR
085  x²
     0
     STO
     35
     1
090  SUM
     39
     GTO
     A
```

2. Unterprogramm I zur Datenaufnahme

```
094  Lbl
095  1/x
     STO
     Ind 35
     SUM
     Ind 33
100  x²
     SUM
     Ind 34
     1
     SUM
105  33
     SUM
     34
     SUM
     35
110  INV SBR
```

3. Unterprogramm II zur Datenaufnahme

```
111  Lbl
     x²
     RCL
     Ind 33
115  x
     RCL
     Ind 34
     =
     SUM
120  Ind 36
     1
     SUM
     34
     SUM
125  36
     INV
     SUM
     35
     RCL
130  35
     INV
     x=t
     x²
     INV SBR
```

4. Berechnung der Korrelationen

```
135  Lbl
     B
     1
     8
     STO
140  33
     6
     STO
     34
     7
145  STO
     35
     5
     STO
     04
150  STO
     38
152  SBR
     Lnx
     SBR
155  STO
     4
     STO
     05
     GTO
160  B'
     Lbl
     B'
     SBR
     RCL
165  SBR
     Lnx
     SBR
     STO
     DSZ
170  5
     B'
     1
     8
     STO
175  33
     GTO
     A'
```

5. Anzeige der Korrelationen

```
178  Lbl
     A'
180  RCL
     Ind 33
     R/S
     1
     SUM
185  33
     GTO
     A'
```

6. Unterprogramm I zur Korrelationsberechnung

```
188  Lbl
     RCL
190  1
191  SUM
     34
     RCL
     34
195  +
     1
     =
     STO
     35
200  1
     INV
     SUM
     38
     RCL
205  38
     STO
     04
     INV SBR
```

7. Unterprogramm II zur Korrelationsberechnung

```
209  Lbl
210  Lnx
     RCL
     Ind 34
     x²
     :
215  RCL
     39
     =
     +/-
     STO
220  00
     RCL
     Ind 34
     :
     RCL
225  39
     =
     STO
     01
     6
230  SUM
     34
     RCL
233  Ind 34
     SUM
235  00
     6
     INV
     SUM
     34
240  INV SBR
```

8. Unterprogramm II zur Korrelationsberechnung

```
241  Lbl
     STO
     RCL
     Ind 35
245  x²
     :
     RCL
     39
     =
250  +/-
     STO
     02
     RCL
     Ind 35
255  x
     RCL
     01
     =
     STO
260  03
     6
     SUM
     35
     RCL
265  Ind 35
     SUM
     02
     RCL
     Ind 33
270  -
     RCL
     03
     =
     STO
```

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 275 | Ind 33 | 280 | 02 | 285 | Ind 33 | 290 | INV | 294 | 4 |
| | RCL | | = | | 1 | | SUM | 295 | STO |
| | 00 | | $\sqrt{x}$ | | SUM | | 35 | | INV SBR |
| | x | | INV | | 33 | | DSZ | | |
| | RCL | | Prd | | 5 | | | | |

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_{1,2\ldots n}$ [1] | A | | | U = 2;3;5; | |
| $V_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | | V = 3;4;1; | |
| $W_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | | W = 4;1;2; | |
| $X_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | | X = 2;3;3; | |
| $Y_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | | Y = 4;2;1; | |
| $Z_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | | Z = 4;2;2; | |
| | B [2] | | $r_{uv}$ | | $r_{uv}$ = -0,79 |
| | R/S | | $r_{uw}$ | | $r_{uw}$ = -0,50 |
| | R/S | | $r_{ux}$ | | $r_{ux}$ = +0,76 |
| | R/S | | $r_{uy}$ | | $r_{uy}$ = -0,93 |
| | R/S | | $r_{uz}$ | | $r_{uz}$ = -0,76 |
| | R/S | | $r_{vw}$ | | $r_{vw}$ = -0,14 |
| | R/S | | $r_{vx}$ | | $r_{vx}$ = -0,19 |
| | R/S | | $r_{vy}$ | | $r_{vy}$ = +0,50 |
| | R/S | | $r_{vz}$ | | $r_{vz}$ = +0,19 |
| | R/S | | $r_{wx}$ | | $r_{wx}$ = -0,94 |
| | R/S | | $r_{wy}$ | | $r_{wy}$ = +0,79 |
| | R/S | | $r_{wz}$ | | $r_{wz}$ = +0,94 |
| | R/S | | $r_{xy}$ | | $r_{xy}$ = -0,94 |
| | R/S | | $r_{xz}$ | | $r_{xz}$ = -1,00 |
| | R/S | | $r_{yz}$ | | $r_{yz}$ = 0,94 |
| | | | | | |
| | | | | | |

1) Eingabereihenfolge $U_1, V_1, W_1, X_1, Y_1, Z_1, U_2, V_2, W_2, X_2, Y_2, Z_2$ etc.
2) Hier läuft das Programm ca. 70 sec.

**Programm 26** (Theorie S. 39, Formel 79)
**Rangkorrelation**

1. Dateneingabe

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | - |
| | R/S |
| | = |
| 005 | $x^2$ |
| 006 | SUM |
| | 00 |
| | 1 |
| | SUM |
| 010 | 01 |
| | R/S |

2. Berechnung v. R

| | |
|---|---|
| 012 | Lbl |
| | B |
| | 1 |
| 015 | - |
| | 6 |
| 017 | × |
| | RCL |
| | 00 |
| 020 | : |
| | ( |
| | RCL |
| | 01 |
| | $y^x$ |
| 025 | 3 |
| | - |
| | RCL |
| | 01 |
| | ) |
| 030 | = |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $R_{x_{1,2\ldots m}}$ [1] $R_{y_{1,2\ldots m}}$ [1] | A / R/S / B | R | $R_x$ = 1; 3; 5; 2; 4; $R_y$ = 3; 4; 5; 2; 1; | R = 0,30 |

1) Eingabereihenfolge $Rx_1$, $Ry_1$, $Rx_2$, $Ry_2$ etc.

**Programm 27** (Theorie S. 95, Formel 153)
**Durchschnittliche Rangkorrelation**

1. Dateneingabe

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | STO |
| | 00 |
| | R/S |
| 005 | STO |
| | 01 |
| | GTO |
| | A' |
| | Lbl |
| 010 | A' |
| | R/S |
| | $x^2$ |
| | SUM |
| | 02 |
| 015 | GTO |
| | A' |

2. Berechnung von R

| | |
|---|---|
| 017 | Lbl |
| | B |
| | RCL |
| 020 | 00 |
| | × |
| | ( |
| | 4 |
| | × |
| 025 | RCL |
| | 01 |
| | + |
| | 2 |
| 029 | ) |
| 030 | : |
| | ( |
| | RCL |
| | 00 |
| | - |
| 035 | 1 |
| | ) |
| | : |
| | ( |
| | RCL |
| 040 | 01 |
| | - |
| | 1 |
| | ) |
| | - |
| 045 | 1 |
| 046 | 2 |
| | × |
| | RCL |
| | 02 |
| 050 | : |
| | RCL |
| | 00 |
| | : |
| | RCL |
| 055 | 01 |
| | : |
| | ( |
| | RCL |
| | 00 |
| 060 | - |
| | 1 |
| 062 | ) |
| | : |
| | ( |
| 065 | RCL |
| | 01 |
| | $x^2$ |
| | - |
| | 1 |
| 070 | ) |
| | = |
| | +/- |
| | + |
| 075 | 1 |
| | = |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| k | [A] [ ] | | k=5, N=7, | |
| N | [R/S] [ ] | | ∑R=23;8;25; | |
| alle ∑R | [R/S] [ ] | | 12;10;34; | |
| | [B] [ ] | $\bar{R}$ | 28; | $\bar{R}$ = 0,83 |

**Programm 28** (Theorie S. 43 f., Formel 85)
**Konkordanzkoeffizient für maximal 35 Objekte**

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     STO
     Ind 39
     1
005  SUM
     39
     R/S
     Lbl
     B
010  STO
     38
2. Berechnung
von Z
012  GTO
     A'
     Lbl
015  A'
016  RCL
     Ind 37
     :
     RCL
020  39
     =
     SUM
     36
     RCL
025  37
     -
     RCL
     39
     +
030  1
     =
     x=t
     B'
     1
035  SUM
     37
037  GTO
     A'
     Lbl
040  B'
     0
     STO
     37
     GTO
045  C'
     Lbl
     C'
     RCL
     Ind 37
050  -
     RCL
     36
     =
     X²
055  SUM
     35
057  RCL
     37
     -
060  RCL
     39
     +
     1
     =
065  x=t
     D'
     1
     SUM
     37
070  GTO
     C'
     Lbl
     D'
     RCL
075  35
     R/S
3. Berech-
nung von W
077  :
     RCL
     38
080  X²
     ×
     1
     2
     :
085  (
     RCL
     39
     Yˣ
     3
090  -
     RCL
     39
     )
     =
095  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| alle ∑R | [A] [ ] | | ∑R=14;13;8; | Zähler = |
| k | [B] [ ] | Zähler | 17;24;36; | 870,00 |
| | [R/S] [ ] | W | 31;37; | W = 0,829 |
| | [ ] [ ] | | k = 5 | |

**Porgramm 29** (Theorie S. 45, Formel 88, 90)
**Durchschnittliche Korrelation bei gleichen n**

1. Daten-eingabe

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | STO |
| | 00 |
| | + |
| 005 | 1 |
| | = |
| | : |
| | ( |
| | 1 |
| 010 | - |
| | RCL |
| | 00 |
| | ) |
| | = |
| 015 | Lnx |
| | : |
| | 2 |
| | = |
| | SUM |
| 020 | 01 |
| | 1 |
| 022 | SUM |
| | 02 |
| | R/S |

2. Berechnung von $\bar{r}$

| | |
|---|---|
| 025 | Lbl |
| | B |
| | RCL |
| | 01 |
| | : |
| 030 | RCL |
| | 02 |
| | x |
| | 2 |
| | = |
| 035 | INV |
| | Lnx |
| | STO |
| | 00 |
| | + |
| 040 | 1 |
| | = |
| | : |
| | ( |
| | RCL |
| 045 | 00 |
| | - |
| | 1 |
| | ) |
| | = |
| 050 | $^1/_x$ |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle r | A<br>B | $\bar{r}$ | r = 0,51; 0,58; 0,90; -0,40 | $\bar{r}$ = 0,51 |

**Programm 30** (Theorie S. 45, Formel 88, 89)
**Durchschnittliche Korrelation bei ungleichen n**

1. Daten-eingabe

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | STO |
| | 00 |
| | + |
| 005 | 1 |
| | = |
| | : |
| | ( |
| | 1 |
| 010 | - |
| 011 | RCL |
| | 00 |
| | ) |
| | = |
| 015 | Lnx |
| | : |
| | 2 |
| | = |
| | STO |
| 020 | 01 |
| | R/S |
| | - |
| | 3 |
| 024 | = |
| 025 | SUM |
| | 02 |
| | x |
| | RCL |
| | 01 |
| 030 | = |
| | SUM |
| | 03 |
| | R/S |

2. Berechnung von $\bar{r}$

| | |
|---|---|
| 034 | Lbl |
| 035 | B |
| | RCL |
| | 03 |
| | : |
| | RCL |
| 040 | 02 |
| | x |
| | 2 |
| | = |
| | INV |
| 045 | Lnx |
| | STO |
| | 00 |
| 048 | + |
| | 1 |
| 050 | = |
| | : |
| | ( |
| | RCL |
| | 00 |
| 055 | - |
| | 1 |
| | ) |
| | = |
| | $^1/_x$ |
| 060 | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_{1,2 \ldots n}$ [1]<br>$n_{1,2 \ldots n}$ [1] | A<br>R/S<br>B | $\bar{r}$ | $r_1$ = 0,28,<br>$n_1$ = 39,<br>$r_2$ = 0,45,<br>$n_2$ = 18, | $\bar{r}$ = 0,33 |

1) Eingabereihenfolge $r_1, n_1, r_2, n_2$ etc.

**Programm 31** (Theorie S. 45, Formel 91)
**Partialkorrelation**

1. Dateneingabe

```
000 Lbl
    A
    -
    R/S
    STO
005 00
006 x
    R/S
    STO
    01
```

2. Berechnung von $N_{1-2}(3)$

```
010 =
011 STO
    02
    1
    -
015 RCL
    00
    x²
    =
019 x
020 (
    1
    -
    RCL
    01
025 x²
    )
027 =
    √x
    :
030 RCL
    02
    =
    1/x
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| $r_{1-2}$<br>$r_{1-3}$<br>$r_{2-3}$ | A<br>R/S<br>R/S | $r_{1-2(3)}$ | $r_{1-2} = 0{,}69$<br>$r_{1-3} = 0{,}81$<br>$r_{2-3} = 0{,}85$ | $r_{1-2(3)} =$<br>$0{,}0049$ |

**Programm 32** (Theorie S. 17 f., Formel 42, 46, 47)
**Signifikanz-Test für den Unterschied zweier Korrelationen**

1. Dateneingabe

```
000 Lbl
    A
    SBR
    A'
    STO
005 00
    R/S
    SBR
008 A'
    STO
010 01
    R/S
    -
    3
    =
015 1/x
    STO
    02
018 R/S
    -
020 3
    =
    1/x
    SUM
    02
025 RCL
    02
    √x
028 STO
    02
030 RCL
    00
    -
    RCL
    01
035 =
    |x|
    STO
    00
    R/S
```

2. 5%-Niveau

```
040 Lbl
    B
    RCL
    00
    -
045 1
    .
```

047 9
6
x
050 RCL
02
=
R/S

3. 1%-Niveau
054 Lbl
055 C
RCL
00

058 -
2
060 .
5
8
x
RCL
065 02
=
R/S

4. 0.1%'Niveau
Lbl

069 D
070 RCL
00
-
3
.
075 2
9
x
RCL
02
080 =
R/S

5. Unterprogramm Z-Werte
082 Lbl
A'
STO
085 03
+
1
=
:
090 (
1
-

093 RCL
03
095 )
=
Lnx
:
2
100 =
INV SBR

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | A | | $r_1$ = 0,846 | |
| $r_2$ | R/S | | $r_2$ = 0,671 | Rest 5%=0,218 |
| $N_1$ | R/S | | $N_1$= 145 | Rest 1%=0,152 |
| $N_2$ | R/S | | $N_2$= 223 | Rest 0,1%=0,075 |
| | B | Rest 5%[1] | | |
| | C | Rest 1%[1] | | |
| | D | Rest 0,1%[1] | | |

1) Signifikanz auf dem entsprechenden Niveau liegt vor, wenn der Rest größer als 0 ist.

**Programm 33** (Theorie S. 47, Formel 93, 94)
**Lineare Regression für TI 57 ***

1. Dateneingabe
000 R/S
SUM 1
STO 2
x
R/S
005 SUM 3
=
SUM 4
RCL 2

009 $x^2$
010 SUM 5
1
SUM 6
RST

2. Koeffizienten
014 RCL 6
015 Prd 4
Prd 5
RCL 4

018 -
RCL 1
020 x
RCL 3
=
:
(
025 RCL 5
-
RCL 1
$x^2$
)

030 =
STO 4
R/S
RCL 6
INV Prd 1
035 INV Prd 3
RCL 3
-
RCL 1
x
040 RCL 4
=

042 R/S

3. Prognose
043 R/S
x
045 RCL 4
+
RCL 0
=
R/S

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| | RST | R/S | | X = 8; 7; 9; | |
| $X_{1,2...n}$ [1] | R/S | | | Y = 2; 4; 7; | |
| $Y_{1,2...n}$ [1] | R/S | | | | |
| | GTO | 14 | | | |
| | R/S | | b | | b = 1,5 |
| | R/S | | a | | a = -7,667 |
| a | STO | 0 | | | |
| vor jeder Pro- | | | | | |
| gnose | GTO | 43 | | | |
| | R/S | | | $X_i$ = 10 | |
| $X_i$ | R/S | | $Y_i$ | | $Y_i$ = 7,333 |

*) Im TI 58/59 ist diese Funktion fest programmiert.
1) Eingabereihenfolge $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 34** (Theorie S. 48, Formel 95)
**Vertrauensbereich für lineare Regression**

1. Dateneingabe

```
000 Lbl
    A
    STO
    00
    R/S
005 STO
    01
    R/S
    STO
    02
010 R/S
    STO
    03
    R/S
    STO
    04
016 R/S
    STO
    05
    R/S
020 STO
    06
```

2. Berechnung von △

```
022 RCL
    00
    x
025 RCL
    01
    x²
    -
    RCL
030 00
    x
032 RCL
    05
    x²
035 x
    RCL
    02
    x²
    =
040 :
    (
    RCL
    00
    -
045 2
    )
    =
    √x
049 STO
050 07
    1
    +
    RCL
    00
055 1/x
    +
    (
    RCL
    04
060 -
    RCL
    03
    )
    x²
065 :
066 RCL
    00
    :
    RCL
070 02
    x²
    =
    √x
    x
075 RCL
    07
    x
    RCL
    06
080 =
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| N | A | | 10 | |
| $SD_{yN}$ | R/S | | 0,7 | |
| $SD_{xN}$ | R/S | | 12 | |
| $\bar{x}$ | R/S | | 100 | |
| $x_i$ | R/S | | 140 | |
| b | R/S | | 0,03 | |
| t | R/S | $\Delta$ [1] | 2,3 | $\Delta$ = 2,30 |

1) Vertrauensbereich = $x_i \pm \Delta$

**Programm 35** (Theorie S. 49 f., Formel 97)
**Quadratische Regression**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Daten- | | 029 | 0 | 2. Koeffi- | | 087 | 00 | | 117 | 08 |
| eingabe | | 030 | 37 | zienten | | | INV | | | RCL |
| 000 | Lbl | | $Y^x$ | 059 | Lbl | | Prd | | | 10 |
| | A | | 3 | 060 | B | 090 | 02 | | 120 | - |
| | SUM | | = | | RCL | | INV | | | RCL |
| | 00 | | GTO | | 00 | | Prd | | | 02 |
| | STO | 035 | 0 | | INV | | 06 | | | = |
| 005 | 01 | | 42 | | Prd | | RCL | | | STO |
| | × | | +/- | 065 | 05 | 095 | 04 | | 125 | 01 |
| | R/S | | $Y^x$ | | INV | | - | | | RCL |
| | SUM | | 3 | | Prd | | RCL | | | 09 |
| | 02 | 040 | = | | 08 | | 02 | | | - |
| 010 | STO | | +/- | | INV | | = | | | RCL |
| | 03 | | SUM | 070 | Prd | 100 | STO | | 130 | 00 |
| | = | | 08 | | 04 | | 04 | | | = |
| | SUM | | SUM | | RCL | | RCL | | | STO |
| | 04 | 045 | 09 | | 06 | | 05 | | | 03 |
| 015 | RCL | | RCL | | INV | | - | | | RCL |
| | 01 | | 01 | 075 | Prd | 105 | RCL | | 135 | 06 |
| | $x^2$ | | $x^2$ | | 09 | | 00 | | | - |
| | SUM | | × | | INV | | = | | | RCL |
| | 05 | 050 | RCL | | Prd | | STO | | | 07 |
| 020 | SUM | | 03 | | 07 | | 05 | | | = |
| | 06 | | = | 080 | INV | 110 | RCL | | 140 | STO |
| | $x^2$ | | SUM | | Prd | | 06 | | | 00 |
| | SUM | | 10 | | 10 | | - | | | RCL |
| | 07 | 055 | 1 | | RCL | | RCL | | | 01 |
| 025 | RCL | | SUM | | 11 | | 08 | | | : |
| | 01 | | 11 | 085 | INV | 115 | = | | 145 | RCL |
| | INV | | R/S | | Prd | | STO | | | 03 |
| | x≥t | | | | | | | | | |

```
147  -        164  :        180  =        196  07        211  07
     RCL      165  RCL           :             =             -
     04            03             RCL           +/-           RCL
150  :             )             05            +             00
     RCL           =             =        200  RCL      215  ×
     05            STO      185  STO           10            RCL
     =        170  06           08            =             08
     :             R/S           R/S           STO           +
155  (             RCL           ×             07            RCL
     RCL           04            RCL      205  R/S      220  00
     08            +        190  09                          X²
     :        175  RCL           +        3. Prognose       ×
     RCL           06            RCL           Lbl           RCL
160  05            ×             06            C             06
     -             RCL           ×             STO      225  =
     RCL           08       195  RCL           00            R/S
     00                          RCL      210  RCL
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2,\ldots n}$ [1]<br>$Y_{1,2,\ldots n}$ [1] | A<br>R/S | | X = 2;4;5;<br>Y = 4;8;15; | |
| | B<br>R/S | $b_2$<br>$b_1$ | | $b_2$ = 1,67<br>$b_1$ = -8,0 |
| | R/S | a | | a = 13,33 |
| $X_i$ | C | $Y_i$ | $X_i$ = 10 | $Y_i$ = 100,0 |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 36** (Theorie S. 50 f., Formel 99)
**Kubische Regression**

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     SUM
     00
     STO
005  01
     ×
     R/S
     SUM
     02
010  STO
     03
     =
     SUM
     04
015  RCL
     01
     X²
     SUM
     05
020  SUM
     06
     X²
     SUM
024  07
025  RCL
     01
     SBR
     D
     SUM
030  08
     SUM
     09
     X²
     SUM
035  10
     RCL
037  01
     SBR
     A'
040  SUM
     11
     RCL
     01
     X²
045  ×
     RCL
     03
     =
     SUM
050  12
     RCL
     01
     SBR
     D
055  ×
     RCL
     03
     =
     SUM
060  13
     1
     SUM
```

063 14
R/S

2. Koeffi-
zienten

065 Lbl
B
RCL
08
INV
070 Prd
13
INV
Prd
07
075 INV
Prd
11
INV
Prd
080 10
RCL
05
INV
Prd
085 12
INV
Prd
08
RCL
090 11
×
RCL
09
:
095 RCL
05
=
STO
03
100 RCL
07
×
RCL
09
105 :
RCL
05
=
STO

110 01
RCL
00
INV
Prd
115 04
INV
Prd
05
RCL
120 09
:
RCL
00
=
125 STO
15
RCL
07
×
130 RCL
09
:
RCL
00
135 =
STO
16
RCL
14
140 INV
Prd
02
INV
Prd
145 00
INV
Prd
06
INV
150 Prd
09
RCL
02
INV
155 SUM
04
INV
SUM

159 12
160 -
RCL
13
=
+/-
165 STO
17
RCL
00
INV
170 SUM
05
INV
SUM
08
175 -
RCL
07
=
+/-
180 STO
18
RCL
06
INV
185 SUM
15
INV
SUM
01
190 -
RCL
11
=
STO
195 19
RCL
09
INV
SUM
200 16
INV
SUM
03
-
205 RCL
10
=
STO

209 00
210 1
+/-
Prd
15
Prd
215 01
Prd
16
Prd
03
220 RCL
08
INV
Prd
12
225 INV
Prd
01
INV
Prd
230 03
RCL
05
INV
Prd
235 04
INV
Prd
16
INV
240 Prd
15
RCL
18
INV
245 Prd
17
INV
Prd
19
250 INV
Prd
00
RCL
00
255 STO
14
RCL
17

259 STO
260 18
RCL
19
STO
05
265 RCL
04
INV
SUM
12
270 INV
SUM
17
RCL
16
275 INV
SUM
03
INV
SUM
280 00
RCL
15
INV
SUM
285 01
INV
SUM
19
1
290 +/-
Prd
01
Prd
19
295 RCL
19
INV
Prd
17
300 INV
Prd
00
RCL
01
305 INV
Prd
12
INV

```
309  Prd
310  03
     RCL
     17
     -
     RCL
315  12
     =
     :
     (
     RCL
320  03
     -
     RCL
     00
     )
325  =
     STO
     01
     R/S
     RCL
330  17
     +
     RCL
     00
     x
335  RCL
     01
     =
     STO
339  02
340  R/S
     RCL
     18
     +
     RCL
345  05
     x
     RCL
     02
     +
350  RCL
     14
     x
     RCL
     01
     =
355  STO
     03
     R/S
     RCL
360  13
     -
     RCL
     03
     x
365  RCL
4    07
     -
     RCL
369  02
370  x
     RCL
     11
     -
     RCL
375  10
     x
     RCL
     01
     =
380  STO
     04
     R/S
```

3. Prognose

```
383  Lbl
     C
385  STO
     00
     RCL
     04
     +
390  RCL
     03
     x
     RCL
     00
395  +
     RCL
     02
398  x
     RCL
400  00
     X²
     =
     STO
     10
405  RCL
     00
     [SBR D]
     x
410  RCL
     01
     +
     RCL
     10
415  =
     R/S
```

4. Unterprogramm $X^3$

```
417  Lbl
     D
     INV
420  (x≥t)
     E
     Yˣ
     3
     =
425  INV SBR
     Lbl
     E
     +/-
     Yˣ
430  3
     =
     +/-
     INV SBR
```

5. Unterprogramm $X^5$

```
434  Lbl
435  A'
     INV
     (x≥t)
     B'
     Yˣ
440  5
     =
     INV SBR
     Lbl
     B'
445  +/-
     Yˣ
     5
     =
     +/-
450  INV SBR
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2\ldots n}$ [1] | A | | X = 2 5 8 | |
| $Y_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | Y = 4 9 2 | |
| | B | $b_3$ | | $b_3$ = -0,04 |
| | R/S | $b_2$ | | $b_2$ = -0,09 |
| | R/S | $b_1$ | | $b_1$ = 3,80 |
| | R/S | a | | a = -2,93 |
| $X_i$ | C | $Y_i$ | $X_i$ = 10 | $Y_i$ = -12,40 |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 37** (Theorie S. 52 f., Formel 100)
**Potenzregression**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Daten- | 005 | log | 010 | Op | 017 | Op | 023 | Op |
| eingabe | | Σ+ | | 12 | | 13 | | 14 |
| 000 Lbl | | R/S | | INV | | R/S | 025 | INV |
| A | 2. Koeffi- | | | log | 3. Prognose | | | log |
| log | zienten | | | R/S | 020 | Lbl | | R/S |
| x⇄t | 008 | Lbl | 015 | x⇄t | | C | | |
| R/S | | B | | R/S | | log | | |

Bedienungsanleitung nach Programm 39!

**Programm 38** (Theorie S. 54, Formel 101)
**Exponentialregression**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Daten- | 005 | Σ+ | 010 | 12 | 016 | Op | 021 | Op |
| eingabe | | R/S | | INV | | 13 | | 14 |
| 000 Lbl | 2. Koeffi- | | | Lnx | | R/S | | INV |
| A | zienten | | | R/S | 3. Prognose | | | Lnx |
| x⇄t | 007 | Lbl | | x⇄t | 019 | Lbl | 025 | R/S |
| R/S | | B | 015 | R/S | 020 | C | | |
| Lnx | 009 | Op | | | | | | |

Bedienungsanleitung nach Programm 39!

**Programm 39** (Theorie S. 55, Formel 102)
**Logarithmische Regression**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Daten- | 004 | R/S | 008 | B | 014 | Op | 019 | Lnx |
| eingabe | 005 | Σ+ | | Op | 015 | 13 | 020 | Op |
| 000 Lbl | | R/S | 010 | 12 | | R/S | | 14 |
| A | 2. Koeffi- | | | R/S | 3. Prognose | | | R/S |
| Lnx | zienten | | | x⇄t | 017 | Lbl | | |
| x⇄t | 007 | Lbl | | R/S | | C | | |

gemeinsame Bedienungsanleitung zu Programm 37/38/39

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung |
|---|---|---|---|
| $X_{1,2...n}$ [1] | A | | Eingabedaten: |
| $Y_{1,2...n}$ [1] | R/S | | X=3;6;9; Y=5;7;8; |
| Koeffizienten: | | | für alle R.: $X_i$=10 |
| | B | a | Ergebnisse: |
| | R/S | b | 1.Potenz-R.:a=3,134; b=0,434; |
| | R/S | r [2] | r=0,996; $Y_i$=8,513; |
| Prognose: | | | 2.Exponential-R.:a=4,089; b=0,078; r=0,970; $Y_i$=8,950; |
| $X_i$ | C | $Y_i$ | 3.logarithmische R.:a=2,007; b=2,747; r=0,999; $Y_i$=8,334; |

1) Eingabereihenfolge $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$, etc. Negative X sind nicht erlaubt!

**Programm 40** (Theorie S. 56, Formel 103)
**Regressionsgüte**

1. Dateneingabe

```
000 Lbl
    A
    STO
    00
    R/S
005 STO
    01
```

2. Ermitteln von S

```
007 4
    STO
    02
010 RCL
    29
    x=t
    0
    26
015 +
    RCL
    28
    x
    RCL
020 00
    =
    STO
    03
    SBR
025 B
    1
    SUM
    02
    RCL
030 27
    x=t
    0
    52
    +
035 RCL
    00
    x
    RCL
    26
040 +
    RCL
    00
    X²
    x
045 RCL
    25
    =
    STO
    03
050 SBR
    B
    1
    SUM
    02
055 RCL
    24
    x=t
    1
    01
060 +
    RCL
    00
    x
    RCL
065 23
    +
    RCL
    00
    X²
070 x
    RCL
    22
    =
    STO
075 03
    RCL
    00
    INV
    x≥t
080 0
    88
    Yˣ
    3
084 =
085 GTO
    0
    93
    +/-
    Yˣ
090 3
    =
    +/-
    x
    RCL
095 21
    =
    SUM
    03
    SBR
100 B
    1
    SUM
    02
    RCL
105 20
    x=t
    1
    36
    RCL
110 00
    INV
    x≥t
    1
    22
115 Yˣ
    RCL
    19
    =
    GTO
120 1
    28
    +/-
    Yˣ
    RCL
125 19
    =
    +/-
128 x
    RCL
130 20
    =
    STO
    03
    SBR
135 B
    1
    SUM
    02
    RCL
140 17
    x=t
    1
    64
    x
145 RCL
    00
    =
    STO
    03
150 1
    INV
    Lnx
    Yˣ
    RCL
155 03
    x
    RCL
    18
    =
160 STO
    03
    SBR
    B
    1
165 SUM
    02
    RCL
    16
    x=t
170 1
    84
172 +
    RCL
    15
175 x
    RCL
    00
    Lnx
    =
180 STO
    03
    SBR
    B
    R/S
```

3. Unterprogramm (Berechnung v.S)

```
185 Lbl
    B
    RCL
    03
    -
190 RCL
    01
    =
    X²
    SUM
195 Ind 02
    INV SBR
```

4. Aufruf von S

```
    Lbl
    C
    4
200 STO
    02
    RCL
    Ind 02
    R/S
205 1
    SUM
    02
    GTO
    2
210 02
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. lineare Regression: | | | | | |
| a[1] | STO | 29 | | 0,5 | |
| b | STO | 28 | | 2 | |
| 2. quadr. Regression: | | | | | |
| a[1] | STO | 27 | | 0,4 | |
| $b_1$ | STO | 26 | | 0,3 | |
| $b_2$ | STO | 25 | | 1 | |
| 3. kub. Regression: | | | | | |
| a[1] | STO | 24 | | 3 | |
| $b_1$ | STO | 23 | | 0,1 | |
| $b_2$ | STO | 22 | | 2 | |
| $b_3$ | STO | 21 | | 0,2 | |
| 4. Potenz-Regression: | | | | | |
| a[1] | STO | 20 | | 4 | |
| b | STO | 19 | | 0,6 | |
| 5. Exponential-Regression | | | | | |
| a | STO | 18 | | 3 | |
| b[1] | STO | 17 | | 1,5 | |
| 6. logarithm. Regression | | | | | |
| a[1] | STO | 16 | | 5 | |
| b | STO | 15 | | 6 | |
| $X_{1,2 \ldots n}$[2] | A | | | X = 3;6;10; | |
| $Y_{1,2 \ldots n}$[2] | R/S | | | Y = 4;8;11; | S = |
| | C | | S(lin.) | | 116,75 |
| | R/S | | S(quadr.) | | 9489,49 |
| | R/S | | S(kub.) | | 167240,93 |
| | R/S | | S(Potenz) | | 52,02 |
| | R/S | | S(Exp.) | | $9,62 \cdot 10^{13}$ |
| | R/S | | S(log.) | | 178,79 |

1) Diese Koeffizienten dürfen nicht 0 sein.
2) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 41** (Theorie S. 56 f., Formel 105, 106, 107)
**Multiple Regression für 2 unabhängige Variablen**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Berechnung des Koeffizienten | 005 | 00 | 014 | 02 | 023 | STO | 032 | RCL |
| | | $X^2$ | 015 | x | | 10 | | 01 |
| | | = | | RCL | 025 | R/S | | = |
| | | STO | | 00 | | RCL | | : |
| 000 Lbl | | 09 | | = | | 02 | | RCL |
| A' | 010 | RCL | | : | | - | | 09 |
| 1 | | 01 | 020 | RCL | | RCL | | = |
| - | | - | | 09 | 030 | 00 | | STO |
| RCL | | RCL | | = | | x | 040 | 11 |

041 R/S

2. Prognosen

042 Lbl
D
-
045 RCL
03
=
:
RCL
050 06
×
052 RCL
10
+
055 (
R/S
-
RCL
05
060 )
:
RCL
063 08
×
065 RCL
11
=
×
RCL
070 07
+
RCL
073 04
=
075 R/S

3. Korrelationen

076 Lbl
E
RCL
10
080 ×
081 RCL
01
+
RCL
085 11
×
RCL
02
=
090 $\sqrt{x}$
R/S

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_{xz}$ | STO 00 | | 0,772 | |
| $r_{xy}$ | STO 01 | | -0,831 | |
| $r_{yz}$ | STO 02 | | -0,909 | |
| $\bar{X}$ | STO 03 | | 22,2 | |
| $\bar{Y}$ | STO 04 | | 2,8 | |
| $\bar{Z}$ | STO 05 | | 13,1 | |
| $SD_x$ | STO 06 | | 6,46 | |
| $SD_y$ | STO 07 | | 1,317 | |
| $SD_z$ | STO 08 | | 4,067 | |
| | 2nd A' | $b_x$ | | $b_x$ = -0,320 |
| | R/S | $b_z$ | | $b_z$ = -0,662 |
| $X_i$ | D | | $X_i$ = 30 | $Y_i$ = 2,098 |
| $Z_i$ | R/S | $Y_i$ | $Z_i$ = 14 | R = 0,931 |
| | E | R | | |

**Programm 42** (Theorie S. 58, Formel 109, 110, 111, 112)
**Regression dreier unabhängiger Variablen mit einer abhängigen**

1. Berechnung der Koeffizienten

000 Lbl
A
RCL
00
004 ×
005 (
1
-
RCL
04
010 $x^2$
011 )
-
RCL
03
015 ×
(
RCL
018 01
-
020 RCL
02
×
RCL
04
025 )
-
RCL
05
×
030 (
RCL

```
032  02
     -
     RCL
035  01
     ×
     RCL
     04
     )
040  =
     STO
     14
     1
     -
045  RCL
     01
     X²
     -
     RCL
050  02
     X²
     -
     RCL
     04
055  X²
     +
     2
     ×
     RCL
060  01
     ×
     RCL
     02
     ×
065  RCL
066  04
     =
     INV
070  Prd
     14
     RCL
     14
     R/S
075  RCL
     03
     -
     RCL
     05
     ×
080  RCL
     04
     -
     RCL
     14
085  ×
     (
     RCL
     01
     -
090  RCL
     02
     ×
     RCL
     04
095  )
     =
     :
     (
     1
100  -
     RCL
     04
     X²
     )
105  =
     STO
     15
     R/S
     RCL
110  05
     -
     RCL
     02
     ×
115  RCL
     14
     -
     RCL
     04
120  ×
     RCL
     15
     =
     STO
125  16
     R/S
```

2. Prognose

```
127  Lbl
     B
     -
130  RCL
     07
132  =
     :
     RCL
135  11
     ×
     RCL
     14
     +
140  (
     R/S
     -
     RCL
     08
145  )
     :
     RCL
     12
     ×
150  RCL
     15
     +
     (
     R/S
155  -
     RCL
     09
     )
     :
160  RCL
     13
     ×
     RCL
     16
     =
166  ×
     RCL
     10
     +
170  RCL
     06
     =
     R/S
```

3. multiple Korrelation

```
174  Lbl
175  C
     RCL
     00
     ×
     RCL
180  14
     +
     RCL
     03
     ×
185  RCL
     15
     +
     RCL
     05
190  ×
     RCL
     16
     =
     √x
195  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_{wy}$ | STO 00 | | 0,206 | |
| $r_{wx}$ | STO 01 | | -0,470 | |
| $r_{wz}$ | STO 02 | | -0,432 | |
| $r_{xy}$ | STO 03 | | -0,480 | |
| $r_{xz}$ | STO 04 | | 0,469 | |
| $r_{yz}$ | STO 05 | | -0,769 | |
| $\overline{Y}$ | STO 06 | | 3,4 | |
| $\overline{W}$ | STO 07 | | 0,111 | |
| $\overline{X}$ | STO 08 | | 0,131 | |
| $\overline{Z}$ | STO 09 | | 0,031 | |
| $SD_y$ | STO 10 | | 1,350 | |
| $SD_w$ | STO 11 | | 0,514 | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $SD_x$ | STO 12 | | 0,536 | |
| $SD_z$ | STO 13 | | 0,475 | |
| | A | $b_w$ | | $b_w$ = -0,232 |
| | R/S | $b_x$ | | $b_x$ = -0,232 |
| | R/S | $b_z$ | | $b_z$ = -0,760 |
| $W_i$ | B | | $W_i$ = 0,89 | |
| $X_i$ | R/S | | $X_i$ = -0,11 | |
| $Z_i$ | R/S | $Y_i$ | $Z_i$ = 0,06 | $Y_i$ = 3,005 |
| | C | R | | R = 0,805 |

**Programm 43** (Theorie S. 62, Formel 116, 117, 118)
**Invertierte Elemente einer 3 x 3-Matrix**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | 022 | 01 | 044 | 04 | 066 | x | 088 | +/- |
| | B' | | x | 045 | x | | RCL | | + |
| | 1 | | RCL | | RCL | | 07 | 090 | 1 |
| | - | 025 | 00 | | 05 | | : | | = |
| | RCL | | = | | : | 070 | RCL | | : |
| 005 | 00 | | STO | | RCL | | 08 | | RCL |
| | $x^2$ | | 06 | 050 | 06 | | = | | 04 |
| | = | | RCL | | = | | +/- | 095 | = |
| | STO | 030 | 01 | | STO | | + | | R/S |
| | 04 | | - | | 08 | 075 | 1 | | RCL |
| 010 | 1 | | RCL | | RCL | | = | | 04 |
| | - | | 00 | 055 | 01 | | : | | : |
| | RCL | | x | | x | | RCL | 100 | RCL |
| | 01 | 035 | RCL | | RCL | | 04 | | 06 |
| | $x^2$ | | 02 | | 04 | 080 | = | | = |
| 015 | = | | = | | : | | R/S | | +/- |
| | STO | | STO | 060 | RCL | | RCL | | : |
| | 05 | | 07 | | 06 | | 06 | 105 | RCL |
| | RCL | 040 | RCL | | - | | : | | 08 |
| | 02 | | 06 | | RCL | 085 | RCL | | = |
| 020 | - | | - | | 00 | | 08 | | R/S |
| | RCL | | RCL | 065 | = | | = | | |

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_{wx}$ | STO | 00 | | $r_{wx}$ = -0,47 | |
| $r_{wz}$ | STO | 01 | | $r_{wz}$ = -0,432 | |
| $r_{xz}$ | STO | 02 | | $r_{xz}$ = 0,469 | |
| | 2nd | B' | $r^{ww}$ | | $r^{ww}$ = 1,386 |
| | R/S | | $r^{xx}$ | | $r^{xx}$ = 1,445 |
| | R/S | | $r^{zz}$ | | $r^{zz}$ = 1,384 |

**Programm 44** (Theorie S. 65 f.)
**Restkorrelationsmatrix**

1. Eingabe der Ladungszahlen

```
000 Lbl
    A
    STO
    Ind 49
    1
005 SUM
    49
007 R/S
```

2. Berechnung der Restkorrelation

```
008 Lbl
    B
010 0
    STO
    49
013 GTO
    A'
015 Lbl
    A'
    R/S
    -
    RCL
020 Ind 49
    x
    RCL
023 Ind 48
    =
025 R/S
    1
    SUM
    48
    GTO
030 A'
    Lbl
    C
033 1
    SUM
035 49
    RCL
    49
    STO
    48
040 GTO
    A'
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung |
|---|---|---|---|
| alle Ladungszahlen[1)]<br>$r$[2)]<br>nach Ablesen von $r_{Rest}$<br>nach Abarbeiten jeder Spalte | [ ] [ ]<br>[A] [ ]<br>[B] [ ]<br>[R/S] [ ]<br>[ ] [ ]<br>[R/S] [ ]<br>[ ] [ ]<br>[ ] [ ]<br>[C] [ ]<br>[ ] [ ]<br>[ ] [ ] | $r_{Rest}$ | Ladungszahlen:<br>0,86;0,45;0,93;<br>Korrelationsmatrix:<br>(0,95)<br>0,95 (0,76)<br>0,53 0,76 (0,81)<br>Rest-Matrix:<br>(0,21)<br>0,56 (0,56)<br>-0,27 0,34 (-0,06) |

1) zeilenweise eingeben, mit der obersten beginnend.
2) spaltenweise eingeben, mit der Kommunalität beginnend.

**Programm 45** (Theorie S. 68 f., Formel 123, 124)
**Rotation von Faktoren**

1. Dateneingabe

```
000 Lbl
    A
    STO
    00
004 R/S
005 STO
    01
    R/S
    STO
    02
```

2. Berechnung der rot. Faktoren

```
010 RCL
    01
    x
013 RCL
    00
015 COS
    -
    RCL
    02
019 x
020 RCL
    00
    sin
    =
    R/S
```

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 025 | RCL | 028 | RCL | 031 | + | 034 | × | 037 | COS |
| | 01 | | 00 | | RCL | 035 | RCL | | = |
| | × | 030 | sin | | 02 | | 00 | | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | A | | $\alpha$ = 26,288° | |
| $a_1$ | R/S | | $a_1$ = 0,84 | |
| $a_2$ | R/S | $a'_1$ | $a_2$ = -0,47 | $a'_1$ = 0,96 |
| | R/S | $a'_2$ | | $a'_2$ = -0,05 |
| | | | | |

**Programm 46** (Theorie S. 71 f., Formel 127)
**1-faktorielle Varianzanalyse**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. Daten- | | 012 | SUM | 027 | STO | 037 | : | 051 | RCL |
| eingabe | | | 04 | | 00 | | RCL | | 05 |
| 000 | Lbl | | R/S | | STO | | 04 | | - |
| | A | 015 | Lbl | 030 | 03 | 040 | = | | RCL |
| | SUM | | B | | R/S | | STO | 055 | 00 |
| | 00 | | RCL | 2. Berech- | | | 00 | | = |
| | SUM | | 00 | nung der | | | - | | R/S |
| 005 | 01 | | $x^2$ | Quadrat- | | | RCL | | - |
| | $x^2$ | 020 | : | summen | | 045 | 02 | | RCL |
| | SUM | | RCL | 032 | Lbl | | = | 060 | 01 |
| | 02 | | 03 | | C | | +/- | | = |
| | 1 | | = | | RCL | | STO | | +/- |
| 010 | SUM | | SUM | 035 | 01 | | 01 | | R/S |
| | 03 | 025 | 05 | | $x^2$ | 050 | R/S | | |
| | | | 0 | | | | | | |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle X einer | | | Faktorstufen | |
| Stichprobe | A | | I II III | |
| nach jeder | | | 3 4 6 | |
| Stichprobe | B | | 2 3 4 | |
| | C | $QS_{tot}$ | 4 5 9 | $QS_{tot}$ = 70,67 |
| | R/S | $QS_{treat}$ | 8 6 10 | $QS_{treat}$ = 22,17 |
| | R/S | $QS_{Fehler}$ | 1.Stpr. 2.Stpr. 3.Stpr. | $QS_{Fehler}$ = 48,50 |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

**Programm 47** (Theorie S. 75 ff., Formel 136, 137)
**2-faktorielle Varianzanalyse**

1. Dateneingabe I

| | |
|---|---|
| 000 | Lbl |
| | A |
| | SUM |
| | 00 |
| | $x^2$ |
| 005 | SUM |
| | 01 |
| | 1 |
| | SUM |
| | 02 |
| 010 | R/S |
| | Lbl |
| | B |
| | RCL |
| | 00 |
| 015 | R/S |
| | SUM |
| | 03 |
| | $x^2$ |
| | SUM |
| 020 | 04 |
| | RCL |
| | 02 |
| | STO |
| | 05 |
| 025 | 0 |
| | STO |
| | 00 |
| | STO |
| | 02 |
| 030 | R/S |

2. Dateneingabe II

| | |
|---|---|
| 031 | Lbl |
| | C |
| | $x^2$ |
| | SUM |
| 035 | 06 |
| | 1 |
| | SUM |
| | 08 |
| | R/S |

3. Dateneingabe III

| | |
|---|---|
| 040 | Lbl |
| | D |
| | $x^2$ |
| | SUM |
| | 07 |
| 045 | 1 |
| | SUM |
| 047 | 09 |
| | R/S |

4. Berechnung der Quadratsummen

| | |
|---|---|
| 049 | Lbl |
| 050 | E |
| | RCL |
| | 03 |
| | $x^2$ |
| | STO |
| 055 | 03 |
| | RCL |
| | 08 |
| | INV |
| | Prd |
| 060 | 03 |
| | INV |
| | Prd |
| | 07 |
| | RCL |
| 065 | 09 |
| | INV |
| | Prd |
| | 03 |
| | INV |
| 070 | Prd |
| | 06 |
| | RCL |
| | 05 |
| | INV |
| 075 | Prd |
| | 03 |
| | INV |
| | Prd |
| | 06 |
| 080 | INV |
| | Prd |
| | 07 |
| | INV |
| | Prd |
| 085 | 04 |
| | RCL |
| | 06 |
| | - |
| | RCL |
| 090 | 03 |
| | = |
| | R/S |
| | RCL |
| | 07 |
| 095 | - |
| | RCL |
| | 03 |
| 098 | = |
| | R/S |
| 100 | RCL |
| | 04 |
| | - |
| | RCL |
| | 06 |
| 105 | - |
| | RCL |
| | 07 |
| | + |
| 110 | RCL |
| | 03 |
| | = |
| | R/S |
| | RCL |
| | 01 |
| 115 | - |
| | RCL |
| | 04 |
| | = |
| | R/S |
| 120 | RCL |
| | 01 |
| | - |
| | RCL |
| | 03 |
| 125 | = |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle X einer Stichprobe nach jeder Stichprobe | [ ] [ ] | | Als Testrechnung möge das Beispiel auf S. 78 benützt werden. | |
| | [A] [ ] | | | |
| | [ ] [ ] | | | |
| | [B] [ ] | Zellen-$\sum$ | | |
| | [R/S] [ ] | | | |
| I, 1; I, 2; ... I, p | [C] [ ] | | | |
| II, 1; II, 2; ... II, q | [D] [ ] | | | |
| | [E] [ ] | $QS_I$ | | |
| | [R/S] [ ] | $QS_{II}$ | | |
| | [R/S] [ ] | $QS_{I \times II}$ | | |
| | [R/S] [ ] | $QS_{Fehler}$ | | |
| | [R/S] [ ] | $QS_{tot}$ | | |
| | [ ] [ ] | | | |

**Programm 48** (Theorie S. 82 ff., Formel 145, 146)
**1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen**
vgl. Beispielanalyse Seite 105

**Programm 49** (Theorie S. 85 ff., Formel 148, 149)
**2-fache Varianzanalyse mit Meßwiederholungen**

1. Vorbereitung
000 Lbl
A'
STO
00
STO
005 01
R/S
STO
02
STO
010 03
R/S
STO
04
GTO
015 B'

2. Dateneingabe I
016 Lbl
B'
R/S
SUM
020 05
SUM
06
$x^2$
SUM
025 12
DSZ
0
B'
RCL
030 06
R/S
SUM
033 07
$x^2$
035 SUM
08
0
STO
06
040 RCL
01
STO
00
DSZ
045 2
B'
RCL
07
$x^2$
050 SUM
09
0
STO
07
055 RCL
03
STO
02
GTO
060 B'

3. Dateneingabe II
061 Lbl
A
$x^2$
SUM
065 10
R/S

4. Dateneingabe III
067 Lbl
B
$x^2$
070 SUM
11
R/S

5. Berechnung der Quadratsummen
073 Lbl
C'
075 RCL
05
$x^2$
STO
05
080 RCL
01
INV
Prd
05
085 INV
Prd
09
INV
Prd
090 08
RCL
03
INV
Prd
095 05
INV
Prd
10
INV
100 Prd
09
INV
Prd
11
105 RCL
04
INV
Prd
05
110 INV
Prd
10
RCL
09
115 SBR
$1/x$
RCL
08
-
120 RCL
09
=
R/S
RCL
125 08
SBR
$1/x$
RCL
10
130 SBR
$1/x$
RCL
11
-
135 RCL
10
-
RCL
139 09
140 +
RCL
05
=
R/S
145 RCL
12
-
RCL
11
150 -
RCL
08
+
RCL
155 09
=
R/S
RCL
12
160 -
RCL
08
=
R/S
165 RCL
12
SBR
$1/x$

6. Unterprogramm
169 Lbl
170 $1/x$
-
RCL
05
=
175 R/S
INV SBR

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung |
|---|---|---|---|
| p | 2nd A' | | |
| q | R/S | | |
| r | R/S | | Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.87 benützt werden. |
| alle X (zeilenweise) | R/S | Zeilensumme (nach je 1 Zeile) | |
| nach Ablesen jeder Zeilensumme | R/S | | |
| I, 1, I, 2..., I, p | A | | |
| ∑VpI, 1/III, 1; ∑VpI, 2/III, 1... | | | |
| ∑VpI, 1/III, 2... ∑VpI, p/III, r | B | | |
| | 2nd C' | $QS_{III}$ | |
| | R/S | $QS_{in\ Stpr.}$ | |
| | R/S | QS zw Vpn | |
| | R/S | $QS_{I}$ | |
| | R/S | $QS_{IxII}$ | |
| | R/S | $QS_{IxVpn}$ | |
| | R/S | $QS_{in\ Vpn}$ | |
| | R/S | $QS_{tot}$ | |

**Programm 50** (Theorie S. 74, Formel 133, 134)
**Bartlett-Test**

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     SUM
     00
     SUM
005  01
     x²
     SUM
     02
     1
010  SUM
     03
     R/S
     Lbl
     A'
015  RCL
     02
     -
     RCL
     01
020  x²
021  :
     RCL
     03
     SUM
025  04
     =
     :
     (
     RCL
030  03
     -
     1
     )
     =
035  SUM
     05
     STO
     06
     x
040  RCL
     03
     =
     SUM
044  07
045  RCL
     03
     -
     1
     =
050  STO
     08
     x
     RCL
     06
055  log
     =
     SUM
     09
     RCL
060  08
     1/x
     SUM
     10
     1
065  SUM
     11
067  0
     STO
     01
070  STO
     02
     STO
     03
     R/S

2. Ermittlung
von Chi
075  Lbl
     B'
     RCL
     07
     :
080  RCL
     04
     =
     log
     STO
085  00
     RCL
     04
088  -
     RCL
090  11
     =
     Prd
     00
     1/x
095  +/-
     SUM
     10
     RCL
     09
100  INV
     SUM
     00
     3
     x
105  (
     RCL
     11
     -
     1
110  )
```

```
111  =        115  1        119  .        123  :        127  RCL
     1/x           SUM   120  3              RCL           00
     Prd           10         0        125  10            =
     10            2          3              x        130  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| alle X einer Stichprobe nach jeder Stichprobe | [ ] [ ]<br>[A] [ ]<br>[ ] [ ]<br>[2nd] [A']<br>[2nd] [B']<br>[ ] [ ] | $Chi^2$ | 1.Stpr.:99;<br>105;86;121;<br>2.Stpr.:67;<br>134;119;<br>3.Stpr.:77;98;<br>104;107;112; | $Chi^2$ = 3,38 |

**Programm 51** (Theorie S. 89 f., Formel 151)
**Rating**

```
1. Vor-
bereitung
000  Lbl
     A'
     STO
     00
     STO
005  01
     R/S
     STO
     02
     GTO
010  B'

2. Daten-
eingabe u.
Skalenwerte
011  Lbl
     B'
     R/S
014  SUM
015  03
     x²
     SUM
     04
     DSZ
020  0
     B'
     RCL
     03
     :
025  RCL
     01
     =
     R/S
     SUM
030  05
     x²
     STO
033  06
     SUM
035  07
     RCL
     04
     :
     RCL
040  01
     -
     RCL
     06
     =
045  SUM
     08
     0
     STO
     03
050  STO
     04
052  RCL
     01
     STO
055  00
     GTO
     B'

3. Überein-
stimmung
058  Lbl
     C'
060  RCL
     08
     :
     (
     RCL
065  01
     -
     1
     )
069  :
070  (
     RCL
     07
     -
     RCL
075  05
     x²
     :
     RCL
     02
080  )
     -
     1
     =
     +/-
085  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| N | 2nd A' | | N = 3, k = 4, | Skalenwerte: |
| k | R/S | | 2 2 3 | 2,33 |
| alle X einer | | | 2 3 3 | 2,67 |
| Zeile | R/S | Skalenwert | 1 2 2 | 1,67 |
| nach Ablesen | | | 3 4 2 | 3,00 |
| des Skalenwer- | | | | Ü = 0,31 |
| tes | R/S | | | |
| | 2nd C' | Ü | | |

**Programm 52** (Theorie S. 91 ff.)
**Likert-Skala für 37 Objekte**

1. Vorbereitung
000 Lbl
A'
STO
00
STO
005 38
1
STO
39
GTO
010 B'

2. Dateneingabe
011 Lbl
B'
R/S
SUM
015 Ind 39
016 SUM
37
DSZ
0
020 B'
1
SUM
39
RCL
025 38
STO
00
GTO
B'

3. Skalenwerte
030 Lbl
C'
RCL
39
034 STO
035 00
GTO
D'
Lbl
D'
040 RCL
37
INV
Prd
Ind 00
045 DSZ
0
D'
1
STO
050 00
STO
39
0
STO
055 38
GTO
E'
Lbl
E'
060 RCL
Ind 00
SUM
38
DSZ
065 0
E'
RCL
39
STO
070 00
RCL
38
-
RCL
075 Ind 00
076 :
2
-
.
080 5
=
R/S
1
SUM
085 39
SUM
00
0
STO
090 38
GTO
E'

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| Zahl der Objekte | [ ] [ ] | | 2 | |
| | [2nd] [A'] | | | |
| Meßwerte (zeilenweise)[2] | [ ] [ ] | | | |
| | [R/S] [ ] | | 14 21 | |
| | [2nd] [C'] | $F_1$ [1] | 35 48 | F = -0,3517 |
| | [R/S] [ ] | $F_{2,3 \ldots n}$ [1] | | F = +0,1483 |

1) Es erscheinen die Flächen, deren z-Werte nach Tab. 1 die Skalenwerte sind.
2) Es können maximal 37 Kategorien skaliert werden.

**Programm 53** (Theorie S. 93)
**Guttmann-Skala für 37 Objekte**

| | 1. Dateneingabe | | 2. Skalenwerte | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 000 | Lbl | | 012 | Lbl | 026 | STO | 043 | Lbl | 060 | 0 |
| | A | | | B | | 48 | | B' | | = |
| | 1 | | | RCL | | STO | 045 | RCL | | R/S |
| | SUM | | 015 | 49 | 030 | GTO | | 48 | | 1 |
| | 00 | | | INV | | A' | | STO | | SUM |
| 005 | R/S | | | Prd | | Lbl | | 00 | 065 | 48 |
| | STO | | | Ind 00 | | A' | | RCL | | RCL |
| | Ind 00 | | | DSZ | | RCL | 050 | 49 | | 48 |
| | SUM | | 020 | 0 | 035 | Ind 00 | | - | | STO |
| | 49 | | | B | | SUM | | RCL | | 00 |
| 010 | GTO | | | 0 | | 49 | | Ind 00 | 070 | 0 |
| | A | | | STO | | DSZ | | : | | STO |
| | | | | 49 | | 0 | 055 | 2 | | 49 |
| | | | 025 | 1 | 040 | A' | | = | | GTO |
| | | | | | | GTO | | × | | A' |
| | | | | | | B' | | 1 | | |
| | | | | | | | | 0 | | |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle f | [A] [ ] | | f = 12; 18; 32 | |
| | [R/S] [ ] | | | Skalenwerte: |
| | [B] [ ] | 1. Skalenwert | | 9,68 |
| | [ ] [ ] | | | 33,87 |
| | [R/S] [ ] | übrige Skalenwerte | | 74,19 |
| | [ ] [ ] | | | |

**Programm 54** (Theorie S. 96 ff., Formel 155, 156)
**Konsistenz mit Signifikanztest**

```
1. Daten-
eingabe
000  Lbl
     A
     x²
     SUM
     00
005  1
     SUM
     01
     R/S
2. Konsistenz
009  Lbl
010  A'
     RCL
     01
     :
     2
015  =
     INV
     Int
     (x=t)
     B'
020  RCL
     01
     x²
     -
     1
025  =
     STO
     02
     GTO
     C'
030  Lbl
     B'
     RCL
     01
     x²
035  -
     4
037  =
     STO
     02
040  GTO
     C'
     Lbl
     C'
     RCL
045  01
     ×
     2
     ×
     (
050  2
     ×
     RCL
     01
     -
055  1
     )
     ×
     (
     RCL
060  01
     -
     1
     )
     -
065  1
     2
     ×
     RCL
     00
070  =
     :
     RCL
     01
     :
075  RCL
     02
077  =
     R/S
3. Signifi-
kanz-Test
079  RCL
080  01
     [SBR 1/x]
     STO
     03
085  RCL
     01
     -
     3
     =
090  [SBR 1/x]
     ×
     2
     4
095  =
     INV
     Prd
     03
     RCL
100  01
     ×
     (
     CE
     -
105  1
     )
     ×
     (
     RCL
110  01
     ×
     2
     -
114  1
115  )
     :
     1
     2
     -
120  RCL
     00
     :
     2
     -
125  .
     5
     =
     +/-
     SUM
130  03
     8
     :
     (
     RCL
135  01
     -
     4
     )
     =
140  Prd
     03
     RCL
     01
     ×
145  (
     CE
     -
     1
     )
150  ×
     (
     RCL
     01
     -
155  2
156  )
     :
     (
     RCL
160  01
     -
     4
     )
     x²
165  =
     R/S
     SUM
     03
     RCL
170  03
     R/S
4. Unter-
programm
172  Lbl
     1/x
     STO
175  09
     1
     STO
     08
     GTO
180  √x
     Lbl
     √x
     RCL
     09
185  Prd
     08
     (DSZ)
     9
     √x
190  RCL
     08
     INV SBR
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| alle Spalten-∑ | A | | | Spalten-∑ = | |
| | 2nd | A' | K | 1;3;4;2;3;5;3 | K = 0,64 |
| | R/S | | df | | df = 23,33 |
| | R/S | | Chi² | | Chi² = 24,00 |

# Programme in umgekehrter polnischer Notation (UPN)

**Programm 1** (Theorie S. 1, 3 - 6, Formel 1, 2, 6 - 11, 14 - 19)
**Arithm. Mittel, Varianz u. Standardabweichung für ungruppierte u. für tabellierte Daten**

1. Eingabe von tabellierten Daten

```
001  Lbl 1
     STO 3
     R/S
     STO 4
005  STO+0
     RCL 3
     ENT
     RCL 4
     x
010  STO+1
     RCL 3
     x²
     ENT
     RCL 4
015  x
     STO+2
     RTN
```

2. Errechnung von $\bar{x}$

```
018  Lbl 2
     RCL 1
020  ENT
     RCL 0
     :
     R/S
```

3. Errechnung von SD u. V

```
024  Lbl 3
025  RCL 1
     x²
     ENT
028  RCL 0
     :
030  RCL 2
     -
     RCL 0
     ENT
     1 (0)*
035  -
     :
     CHS
     R/S
     √x
040  R/S
```

4. Ermittlung v. $SD_N$ u. $V_N$ aus ungruppierten Daten[1]

```
041  Lbl 4
     P⇄S
     RCL 4
     x²
045  ENT
     RCL 9
     :
     RCL 5
     -
050  CHS
     RCL 9
     :
     R/S
     √x
055  R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| a) ungr. Daten: alle x | | | | x=4; 3; 5; 6; 1; 0; 12; 7; 9 | |
| | Σ+ | | | | |
| | x̄ | | x̄ | | x̄ = 5,222 |
| | S | | $SD_{N-1}$ | | $SD_{N-1}$=3,801 |
| | x² | | $V_{N-1}$ | | $V_{N-1}$=14,444 |
| | GSB | 4 | $V_N$ | Interv. f | $SD_N$=3,583 |
| | R/S | | $SD_N$ | 0-2 2 | $V_N$=12,840 |
| b) tab. Daten:[2] Intervallmitten $(IM)_{1,2...}$ $f_{1,2...}$ | | | | 3-5 3 | x̄ = 5,667 |
| | | | | 6-8 2 | $V_{N-1}$=16,000 |
| | GSB | 1 | | 9-11 1 | $SD_{N-1}$=4,000 |
| | R/S | | | 12-14 1 | |
| | GSB | 2 | x̄ | | |
| | GSB | 3 | V | | |
| | R/S | | SD | | |

*) falls N-1-Gewichtung erwünscht, ist 1, falls -N-Gewichtung erwünscht, ist 0 zu programmieren.

1) Dieser Teil kann bei Bedarf auch gesondert (beginnend mit 001) programmiert und verwendet werden.

2) Eingabereihenfolge: $IM_1$, $f_1$, $IM_2$, $f_2$ etc.

**Programm 2** (Theorie S. 2 f., Formel 5)
**Median, Quartile, Centile für 24 Objekte oder Klassen**

1. Eingabe von Daten f. Einzelobjekte

```
001 Lbl 1
    STO i
    1
    STO+ (i)
005 .
    5 *)
    0 *)
    STO+1
    RTN
```

2. Eingabe von Daten f. Objektklassen

```
010 Lbl 2
    STO i
    R/S
    STO(i)
    ENT
015 .
    5 *)
    0 *)
    x
    STO+1
020 RTN
```

3. Ermittlg. d. Medians (Quartils, Centils)

```
021 Lbl 3
    5
    STO i
    0
025 STO 2
    STO 3
    GTO 4
    Lbl 4
    RCL (i)
030 STO+2
    RCL 2
    ENT
    RCL 1
    -
    STO 3
036 x>0?
    GTO 5
    ISZ
    GTO 4
040 Lbl 5
    RCL 3
    ENT
    RCL (i)
    :
045 RCL 4
    x
    STO 3
    RCL i
    R/S
050 STO-3
    RCL 3
    CHS
    R/S
```

*) falls nicht der Median gewünscht wird, sind hier die entsprechenden anderen Ziffern einzuprogrammieren, z.B. 25 für das 25%-Quartil.

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| Rohdaten oder Intervalle müssen mit Codes (C) v.5-29 versehen werden! | | | | |
| a) Rohdaten: 1 | STO 4 | | Codes: 6;6;8;9;8;8, 10;12;13;13; 10;7;11; | |
| $C_{1,2...}$ | GSB 1 | | | |
| | GSB 3 | Z( Q ,Ce.) | | Z = 9 |
| b) tab. Daten: | | | | |
| Intervallbreite | STO 4 | | | |
| $C_{1,2,...}$ | GSB 2 | | | |
| $f_{1,2,...}$ | R/S | | | |
| | GSB 3 | C des betr. Intervalls | Code Inter- f<br>vall<br>5 1-2,9 3<br>6 3-4,9 4<br>7 5-6,9 3<br>8 7-8,9 3 | |
| Obergrenze des betr. Intervalls | R/S | Z( Q ,Ce.) | | Z = 4,663 |

1) Eingabereihenfolge: $C_1$, $f_1$, $C_2$, $f_2$ etc.

**Programm 3** (Theorie S. 7, Formel 25, 26)
**Schiefe und Exzeß**

```
1. Eingabe von x̄ und SD
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S

2. Eingabe der IM u. f
006  Lbl 2
     ENT
     RCL 0
     -
010  RCL 1
     :
     STO 2
     3
     Y^x
015  R/S
     STO 3
     STO+4
     ×
     STO+5
020  RCL 2
021  ENT
     4
     Y^x
     RCL 3
025  ×
     STO+6
     RTN

3. Berechnung v.
   Schiefe u. Exzeß
028  Lbl 3
029  RCL 5
030  ENT
     RCL 4
     :
     R/S
     RCL 6
035  ENT
     RCL 4
     :
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | GSB | 1 | | $\bar{x}$ = 10,141 | |
| SD | R/S | | | SD = 5,039 | |
| $IM_{1,2 \ldots n}$ [1] | GSB | 2 | | Interv. f | |
| $f_{1,2 \ldots n}$ [1] | R/S | | | 0-4 12 | |
| | GSB | 3 | Schiefe | 5-9 23 | Schiefe=-0,122 |
| | R/S | | Exzeß | 10-14 25 | Exzeß = 1,891 |
| | | | | 15-19 18 | |

1) Eingabereihenfolge: $IM_1$, $f_1$, $IM_2$, $f_2$ etc.

**Programm 4** (Theorie S. 8, Formel 27)
**Prozentränge für 25 Objekte oder Klassen**

```
1. Daten der
   Objekte eingeben
001  Lbl 1
     STO i
     1
     STO+(i)
005  STO+1
     RTN

2. Daten der
   Klassen eingeben
007  Lbl 2
     STO i
     R/S
010  STO+(i)
011  STO+1
     RTN

3. Ermitteln von
   Prozenträngen
013  Lbl 3
     STO i
015  STO 2
     GTO 4
     Lbl 4
     RCL (i)
     STO+3
020  RCL i
     ENT
     5
     -
024  (x=0?)
025  GTO 5
     (DSZ)
     GTO 4
     Lbl 5
     RCL 2
030  STO i
     RCL (i)
     ENT
     2
     :
035  RCL 1
     :
     1
     0
     0
040  ×
     RCL 3
     ENT
     RCL 1
     :
045  1
     0
     0
     ×
     -
050  CHS
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| den Objekten | | | | C:5;5;7;8;7; | |
| bzw. Klassen | | | | 7;9;11;12; | |
| Codes(C) von | | | | 12;9;6;10; | |
| 5 bis 29 zuwei- | | | | $C_{\%}$ = 7 | PR=34,62 |
| sen! | | | | | |
| a)Objekte: | | | | | |
| $C_{1,2...n}$ | GSB | 1 | | C Klasse f | |
| $C_{\%}$ 1) | GSB | 3 | PR | 5 1-2,9 3 | |
| (vor neuem $C_{\%}$) | | | | 6 3-4,9 1 | |
| 0 | STO | 3 | | 7 5-6,9 2 | |
| b) Klassen: | | | | 8 7-8,9 4 | |
| $C_{1,2...n}$ 2) | GSB | 2 | | 9 9-10,9 0 | |
| $f_{1,2...n}$ 2) | R/S | | | 10 11-12,9 2 | |
| $C_{\%}$ | GSB | 3 | PR | $C_{\%}$=8 | |
| (vor neuem $C_{\%}$) | | | | (Klasse 7-8,9) | PR = 66,67 |
| 0 | STO | 3 | | | |

1) $C_{\%}$ = Code des Objekts/der Klasse, wofür man den PR sucht.
2) Eingabereihenfolge: $C_1$, $f_1$, $C_2$, $f_2$ etc.

**Programm 5** (Theorie S. 8, Formel 28)
**Standardisierung von Verteilungen aus Urdaten**

1. Ermittlung von z - Werten

```
001  Lbl 1
     ENT
     x̄
004  -
005  STO 0
     S
     STO : 0
     RCL 0
     R/S
```

2. Ermittlung v. x mit vorgegebenen z-Werten

```
010  Lbl 2
     S
     ENT
013  R/S
     x
015  STO 0
     x̄
     STO+0
     RCL 0
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| alle X | Σ+ | | | X=5;3;2;1;7; | |
| $X_i$ | GSB | 1 | $z_i$ | 0;8;4;6;3; | |
| | GSB | 2 | | 6;12 | |
| $z_i$ 1) | R/S | | $X_i$ | $X_i$=0 | $z_i$ = -1,425 |
| | | | | $z_i$=2 | $X_i$ = 11,417 |

1) falls x-Werte zu bestimmten z-Werten gesucht werden, muß vor der Eingabe eines z-Wertes immer zuerst GSB 2 gedrückt werden.

**Programm 6** (Theorie S. 8, Formel 28)
**Standardisierung von Verteilungen aus tabellierten Daten**

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 1
     STO+2
     x
     STO+3
     RCL 0
010  x²
     ENT
     RCL 1
     x
014  STO+4
015  RTN
```

2. Ermittlung v. SD u. $\bar{x}$

```
016  Lbl 2
     RCL 3
     ENT
     RCL 2
020  :
     STO 0
     RCL 3
     x²
     ENT
025  RCL 2
026  :
     RCL 4
     -
     1
030  ENT
     RCL 2
     -
     :
     √x
035  STO 1
     R/S
```

3. Ermittlung v. z-Werten

```
037  Lbl 3
     ENT
039  RCL 0
040  -
     RCL 1
     :
     R/S
```

4. Ermittlung von x-Werten mit vorgegebenen z-Werten

```
044  Lbl 4
045  ENT
     RCL 1
     x
     RCL 0
     +
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $IM_{1,2...m}$ [1)] | GSB 1 | | Interv. f | |
| $f_{1,2...m}$ [1)] | R/S | | 0-2 3 | |
| | GSB 2 | | 3-5 4 | |
| $X_i$ | GSB 3 | $z_i$ | 6-8 4 $X_i=0$ | $z_i = -1{,}443$ |
| $z_i$ | GSB 4 | $X_i$ | 9-11 0 | |
| | | | 12-14 1 $z_i=2$ | $X_i = 11{,}928$ |

1) Eingabereihenfolge: $IM_1$, $f_1$, $IM_2$, $f_2$ etc.

**Programm 7** (Theorie S. 10, Formel 30)
**Binomialverteilung**

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 0
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 2
     -
     STO 3
     1
     ENT
010  R/S
     STO 4
```

2. Berechnung von p (x)

```
012  -
     RCL 3
     Y^x
015  RCL 4
     ENT
     RCL 2
     Y^x
     x
020  STO 5
     GSB 1
     STO x 5
023  RCL 2
     STO 0
025  GSB 1
     STO:5
     RCL 3
     STO 0
     GSB 1
030  STO:5
     RCL 5
     R/S
```

3. Unterprogramm "Fakultät"

```
033  Lbl 1
     x=0 ?
035  GTO 4
     1
     STO 1
     GTO 2
     Lbl 2
040  RCL 0
     STOx1
     1
     STO-0
```

```
044  RCL 0
045  x=0 ?
046  GTO 3
     GTO 2
048  Lbl 3
     RCL 1
050  RTN
051  Lbl 4
     1
     RTN
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| N | GSB 0 | | N = 8 | |
| k | R/S | | k = 4 | |
| p | R/S | p (x) | p = 0,50 | p(x) = 0,2734 |

**Programm 8** (Theorie S. 11, Formel 31)
**Poissonverteilung**

```
1. Datenein-
   gabe
001  Lbl 0
     ENT
     R/S
     :
005  STO 2
     R/S
     STO 0
2. Berechnung
   von p (x)
008  Y^x
009  STO 3
010  1
     e^x
     ENT
     RCL 2
     Y^x
015  STO:3
     GSB 1
     STO:3
     RCL 3
     R/S
3. Unterprogramm
   "Fakultät"
020  Lbl 1
     x=0 ?
     GTO 4
     1
     STO 1
025  GTO 2
     Lbl 2
     RCL0
     STOx1
029  1
030  STO-0
     RCL 0
     x=0 ?
     GTO 3
     GTO 2
035  Lbl 3
     RCL 1
     RTN
     Lbl 4
     1
040  RTN
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| f[1] | GSB 0 | | f = 319 | |
| N | R/S | | N = 2450 | |
| k | R/S | p(x) | k = 5 | p(x) = 0,000000274 |

1) f = Häufigkeit, mit welcher das seltene Ereignis unter N Fällen beobachtet wurde.

**Programm 9** (Theorie S. 14 f., Formel 36)
**Normalitätsprüfung**

1. Eingabe der Verteilungskennwerte X, SD u. N

```
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
     GTO 2
```

2. Ermittlung der erwarteten Häufigkeiten

```
008  Lbl 2
     R/S
010  GSB 5
011  R/S
     STO 3
     R/S
     GSB 5
015  R/S
     ENT
     RCL 3
     -
     ABS
020  RCL 2
     x
     GTO 2
     Lbl 3
     GSB 5
025  R/S
026  CHS
     ENT
     .
     5
030  +
     RCL 2
     x
     RTN
```

3. Ermittlung von $Chi^2$

```
034  Lbl 4
035  ENT
     R/S
     STO 4
     -
039  x²
040  RCL 4
     :
     STO+5
     RTN
```

4. Unterprogramm: z-Transformation

```
044  Lbl 5
045  ENT
     RCL 0
     -
     RCL 1
     :
050  RTN
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{X}$ | GSB | 1 | | $\bar{X}$ = 9,100 | | |
| SD | R/S | | | SD = 4,749 | | |
| N | R/S | | | N = 100 | | |
| $I_{2,3...m-1}$ | | | | Interv. | fb | fe: |
| (Untergrenze) | R/S | | z | 1-5,9 | 25 | 25,14 |
| $F_{+/-}$ zu z[1] | R/S | | | 6-10,9 | 38 | 39,02 |
| $I_{2,3...m-1}$ | | | | 11-15,9 | 31 | 26,82 |
| (Obergrenze) | R/S | | z | 16-20,9 | 6 | 7,35 |
| $F_{+/-}$ zu z[1] | R/S | | $fe_{2,3...m-1}$ | | | |
| $I_1$ (Obergrenze) | | | | | | |
| $I_n$ (Untergrenze) | GSB | 3 | z | | | |
| $\|F\|$ zu z[1] | R/S | | $fe_{1,m}$ | | | |
| $fb_{1,2...m}$[2] | GSB | 4 | | | | |
| $fe_{1,2...m}$[2] | R/S | | | | | |
| | RCL | 5 | $Chi^2$ | | | $Chi^2$ = 0,9269 |

1) Eingabereihenfolge: Untergrenze $Intervall_2$, $F_{+/-}$ (Fläche des z-Wertes, den das Programm anzeigt, nach Tab. 1 mit dem Vorzeichen dieses z-Werts), Obergrenze $Intervall_2$, $F_{+/-}$, Untergrenze $Intervall_3$... Obergrenze $Intervall_{n-1}$, $F_{+/-}$, dann Obergrenze $Intervall_1$, $F_1$, Untergrenze $Intervall_n$, $F_n$.

2) Eingabereihenfolge: $fb_1$, $fe_1$, $fb_2$, $fe_2$ etc.

**Programm 10** (Theorie S. 19, Formel 48)
**Unterschied von Prozentangaben**

1. Dateneingabe

| | |
|---|---|
| 001 | Lbl 1 |
| | STO 0 |
| | R/S |
| | STO 1 |
| 005 | R/S |
| | STO 2 |
| | R/S |
| | STO 3 |

2. Berechnung des krit. Bruchs

| | |
|---|---|
| 009 | 1 |
| 010 | 0 |
| | 0 |
| | STO 4 |
| | RCL 0 |
| | ENT |
| 015 | RCL 1 |
| | - |
| 017 | RCL 4 |
| | ENT |
| | RCL 0 |
| 020 | - |
| | RCL 0 |
| | × |
| | RCL 2 |
| | : |
| 025 | RCL 4 |
| | ENT |
| 027 | RCL 1 |
| | - |
| | RCL 1 |
| 030 | × |
| | RCL 3 |
| | : |
| | + |
| | $\sqrt{X}$ |
| 035 | : |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| p1 | GSB 1 | | $p_1$ = 4,8 | |
| p2 | R/S | | $p_2$ = 17,0 | |
| $N_1$ | R/S | | $N_1$ = 386 | |
| $N_2$ | R/S | CR | $N_2$ = 245 | CR = -4,63 |

**Programm 11** (Theorie S. 20, Formel 49)
**t-Test für unabhängige Stichproben**

1. Eingabe der Mittelwerte

| | |
|---|---|
| 001 | Lbl 1 |
| | ENT |
| | R/S |
| | - |
| 005 | STO 0 |

2. Eingabe der N und SD

| | |
|---|---|
| 006 | R/S |
| | $x^2$ |
| | ENT |
| | R/S |
| 010 | : |
| 011 | STO 1 |
| | R/S |
| | $x^2$ |
| | ENT |
| 015 | R/S |

3. Ermittlung von t

| | |
|---|---|
| 016 | : |
| | STO+1 |
| | RCL 1 |
| | $\sqrt{X}$ |
| 020 | STO:0 |
| | RCL 0 |
| | R/S |

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}_1$ | GSB 1 | | $\bar{x}_1$ = 5,48 | |
| $\bar{x}_2$ | R/S | | $\bar{x}_2$ = 3,27 | |
| $SD_1$ | R/S | | $SD_1$ = 7,20 | |
| $N_1$ | R/S | | $N_1$ = 215 | |
| $SD_2$ | R/S | | $SD_2$ = 9,14 | |
| $N_2$ | R/S | t | $N_2$ = 307 | t = 3,08 |

**Programm 12** (Theorie S. 21, Formel 53)
**t-Test für abhängige Stichproben**

1. Eingabe der Paardifferenzen

```
001  Lbl 1
     ENT
     R/S
     -
005  STO+0
     x²
     STO+1
008  1
     STO+2
010  RTN
```

2. Ermittlung von t

```
011  Lbl 2
     RCL 2
     ENT
     1
015  -
     √x
     RCL 0
     x
     STO 3
020  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     x
024  RCL 0
025  x²
     -
     √x
     STO:3
     RCL 3
030  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2\ldots n}$ [1] | GSB 1 | | X = 5; 4; 2; 6; | |
| $X'_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | X' = 2; 3; 5; 6 | |
| | GSB 2 | t | | t = 0,20 |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $X'_1$, $X_2$, $X'_2$ etc.

**Programm 13** (Theorie S. 23, Formel 57)
**z-Wert für U-Test mit unverbundenen Rängen**

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 1
     +
     1
008  +
     RCL 0
010  x
     STO 3
     R/S
```

2. Ermittlung des z-Wertes

```
013  ENT
014  2
015  x
     RCL 3
     -
     CHS
     STO 2
020  RCL 3
     ENT
022  RCL 1
     x
     3
025  :
     √x
     STO:2
     RCL 2
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | GSB 1 | | $n_1$ = 8 | |
| $n_2$ | R/S | | $n_2$ = 14 | |
| $T_1$ | R/S | z | $T_1$ = 73 | z = 1,297 |
| | | | | |

**Programm 14** (Theorie S. 24, Formel 58)
**z-Wert für U-Test mit verbundenen Rängen**

1. Eingabe der gleichen Ränge

```
001  Lbl 1
     STO 5
     ENT
     3
005  Y^x
     RCL 5
     -
     STO+6
     RTN
```

2. Eingabe der übrigen Daten

```
010  Lbl 2
011  STO 0
     ENT
     R/S
     STO 1
015  +
     STO 2
     1
     +
     RCL 0
020  x
     R/S
```

2. Berechnung von z

```
022  ENT
     2
024  x
025  -
     STO 3
     RCL 2
     ENT
     3
030  Y^x
     RCL 2
     -
     RCL 6
     -
035  RCL 0
     x
     RCL 1
038  x
     RCL 2
040  :
     3
     :
     RCL 2
     ENT
045  1
     -
     :
     √x
     STO : 3
050  RCL 3
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle Rgl[1] | GSB 1 | | Rgl: 2;4;3 | |
| $n_1$ | GSB 2 | | $n_1$ = 9 | |
| $n_2$ | R/S | | $n_2$ = 28 | |
| $T_1$ | R/S | z | $T_1$ = 248 | z = -2,728 |
| | | | | |

1) Anzahl von Objekten mit dem gleichen Rangplatz.

**Programm 15** (Theorie S. 26 f., Formel 62)
**Wilcoxen-Test**

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     1
005  +
     STO 1
     RCL 0
     x
     4
010  :
011  R/S
```

2. Ermittlung d. krit. Bruchs

```
012  -
     CHS
     STO 2
015  RCL 0
     ENT
     2
     x
     1
020  +
```

```
021  RCL 1        024  x        027  :√x        030  RCL 2
     x            025  2             STO:2            R/S
     RCL 0             4
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| n<br>$T_w$ | GSB 1<br>R/S | CR | n = 8<br>$T_w$ = 50 | CR = 4,481 |

**Programm 16** (Theorie S. 27, Formel 63)
**Vorzeichen-Test für N ⩽ 25**

```
1. Eingabe von
   N und F
001  Lbl 0
     STO 0
     ENT
     R/S
005  STO 2

2. Ermittlung von p
006  -
     STO 3
     .
     5
010  ENT
011  RCL 2
     Y^x
     .
     5
015  ENT
     RCL 3
     Y^x
     x
     STO 4
020  GSB 1
     STO x 4
     RCL 2
     STO 0
     GSB 1
025  STO:4
     RCL 3
     STO 0
     GSB 1
     STO:4
030  RCL 4
     R/S

3. Unterprogramm
   "Fakultät"
032  Lbl 1
     x=0 ?
     GTO 4
035  1
036  STO 1
     GTO 2
     Lbl 2
     RCL 0
040  STOx1
     1
     STO-0
     RCL 0
     x=0 ?
045  GTO 3
     GTO 2
     Lbl 3
     RCL 1
     RTN
050  Lbl 4
     1
     RTN
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| N<br>F | GSB 0<br>R/S | p | N = 24<br>F = 7 | p = 0,0206 |

**Programm 17** (Theorie S. 29 f., Formel 65)
**4-Felder-Chi-Quadrat**

1. Eingabe der Felder-häufigkeiten

```
001 Lbl 1
    STO 0
    ENT
    R/S
005 STO 1
    +
    R/S
    STO 2
    +
010 R/S
    STO 3
```

2. Ermittlung des Chi-Quadrat

```
012 +
    STO 4
    RCL 0
015 ENT
    RCL 3
    ×
    RCL 1
    ENT
020 RCL 2
    ×
    -
023 x²
    RCL 4
025 ×
    STO 5
    RCL 0
    ENT
    RCL 1
030 +
    RCL 0
    ENT
    RCL 2
    +
035 ×
036 RCL 1
    ENT
    RCL 3
    +
040 ×
    RCL 2
    ENT
    RCL 3
    +
045 ×
    STO:5
    RCL 5
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| a | GSB 1 | | a = 4 | |
| b | R/S | | b = 14 | |
| c | R/S | | c = 28 | |
| d | R/S | $Chi^2$ | d = 28 | $Chi^2$ = 4,282 |

**Programm 18** (Theorie S. 30 f., Formel 32, 66)
**Kontigenztafel für maximal 19 Zeilen**

1. Eingabe der Zeilen-codes u. -summen

```
001 Lbl 1
    STO i
    R/S
    STO(i)
005 STO+1
    RTN
```

2. Spalten-summen

```
007 Lbl 2
    STO 2
    6
010 STO i
    R/S
```

3. Abarbeiten der Zellen

```
012 Lbl 3
013 STO 3
    RCL 2
015 ENT
    RCL(i)
    ×
    RCL 1
    :
020 STO 4
    RCL 3
    -
023 x²
    RCL 4
025 :
    STO+5
    ISZ
    RTN
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung |
|---|---|---|---|
| Zeilensummen mit Codes von 6bis24 versehen Codes:6,7,8... 24 1) $Zs_{1,2...m}$ 1) $Sps_{1,2...,m}$ 2) $Z_{1,2...m}$ 2) | GSB 1<br>R/S<br>GSB 2<br>GSB 3<br>RCL 5 | $Chi^2$ | Eingabedaten:<br>Zs C<br>8 7 9 24 6<br>4 3 5 12 7<br>6 2 3 11 8<br>3 4 4 11 9<br>Sps21 16 21 58<br>Ergebnisse:<br>$Chi^2$ = 2,409 |

Abkürzungen: Zs=Zeilensumme, Sps=Spaltensumme, Z=Zellenhäufigkeit, C=Code.
1) Eingabereihenfolge: 6, $Zs_1$, 7, $Zs_2$, 8, $Zs_3$ etc.
2) Eingabereihenfolge: $Sps_1$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$... (alle Zellen der Spalte von oben nach unten!) $Sps_2$, $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ (alle Zellen der folgenden Spalte) etc. Abarbeiten aller Zellen.

**Programm 19** (Theorie S. 33, Formel 69)
**Cochran-Test**

```
1. Eingabe ∑U
001  Lbl 1
     STO+0
     x²
     STO+1
005  RTN
2. Eingabe Zs
006  Lbl 2
     STO+2
     x²
009  STO+3
010  RTN
3. Eingabe k
011  Lbl 3
     STO 4
4. Ermittlung
   von Chi²
013  ENT
     RCL 1
015  x
016  RCL 0
     x²
     -
     STO 1
020  RCL 4
     ENT
     1
     -
     STOx1
025  RCL 4
026  ENT
     RCL 2
     x
     RCL 3
030  -
     STO:1
     RCL 1
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $\Sigma U_1$, $\Sigma U_2$ etc.<br>$Zs_1$, $Zs_2$ etc.<br>k | GSB 1<br>GSB 2<br>GSB 3 | $Chi^2$ | $\Sigma U$ = 3;2;1<br>Zs = 2;2;2<br>k = 3 | $Chi^2$ = 2,000 |

**Programm 20** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 3 alternative Merkmale**

```
001 Lbl 0
    1
    STO7
    R/S
005 x=0 ?
    GTO 1
    RCL 1
    STOx7
    GTO 2
010 Lbl 1
    RCL 2
    STOx7
013 GTO 2
    Lbl 2
015 R/S
    x=0 ?
    GTO 3
    RCL 3
    STOx7
020 GTO 4
    Lbl 3
    RCL 4
    STOx7
    GTO 4
025 Lbl 4
    R/S
    x=0 ?
    GTO 5
    RCL 5
030 STOx7
    GTO 6
    Lbl 5
    RCL 6
    STOx7
035 GTO 6
    Lbl 6
    RCL 0
038 x²
    STO:7
040 RCL 7
    R/S
    ENT
    RCL 7
    -
045 x²
    RCL 7
    :
    STO+8
    R/S
050 GTO 0
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| N | STO 0 | | N = 1000 | |
| $\Sigma A_1$ | STO 1 | | $\Sigma A_1$ = 400 | |
| $\Sigma A_0$ | STO 2 | | $\Sigma A_0$ = 300 | |
| $\Sigma B_1$ | STO 3 | | $\Sigma B_1$ = 200 | |
| $\Sigma B_0$ | STO 4 | | $\Sigma B_0$ = 600 | |
| $\Sigma C_1$ | STO 5 | | $\Sigma C_1$ = 500 | |
| $\Sigma C_0$ | STO 6 | | $\Sigma C_0$ = 100 | |
| | GSB 0 | | | fe 101 = 120,00 |
| 1.KZ der Konf.[1] | R/S | | | $Chi^2$-Komponente = 3,333 |
| 2.KZ der Konf.[1] | R/S | | fb = 140 | |
| 3.KZ der Konf.[1] | R/S | fe | | |
| fb | R/S | $Chi^2$-Komp. | | |
| vor jeder neuen Konf. | | | | |
| | R/S | | | |
| | RCL 8 | Gesamt-$Chi^2$ | | |

1) KZ = Kennziffer; Eingabe der Konfiguration 101 z.B.: 1 R/S, 0 R/S, 1 R/S.

**Programm 21** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 4 alternative Merkmale**

```
001 Lbl 0
    1
    STO 3
    R/S
005 x=0 ?
    GTO 1
    RCL A
    STOx3
    GTO 2
010 Lbl 1
    RCL B
    STOx3
    GTO 2
    Lbl 2
015 R/S
    x=0 ?
017 GTO 3
    RCL C
    STOx3
020 GTO 4
    Lbl 3
    RCL D
    STOx3
    GTO 4
025 Lbl 4
    R/S
    x=0 ?
    GTO 5
    RCL E
030 STOx3
    GTO 6
    Lbl 5
033 RCL i
    STOx3
035 GTO 6
    Lbl 6
    R/S
    x=0 ?
    GTO 7
040 RCL 0
    STOx3
    GTO 8
    Lbl 7
    RCL 1
045 STOx3
    GTO 8
    Lbl 8
    RCL 2
049 ENT
050 3
    Y^x
    STO:3
    RCL 3
    R/S
055 ENT
    RCL 3
    -
    x^2
    RCL 3
060 :
    STO+4
    R/S
    GTO 0
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Sigma A_1$ | STO | A | | $\Sigma A_1$ = 600 | |
| $\Sigma A_0$ | STO | B | | $\Sigma A_0$ = 300 | |
| $\Sigma B_1$ | STO | C | | $\Sigma B_1$ = 500 | |
| $\Sigma B_0$ | STO | D | | $\Sigma B_0$ = 400 | |
| $\Sigma C_1$ | STO | E | | $\Sigma C_1$ = 200 | |
| $\Sigma C_0$ | STO | i | | $\Sigma C_0$ = 700 | |
| $\Sigma D_1$ | STO | 0 | | $\Sigma D_1$ = 100 | |
| $\Sigma D_0$ | STO | 1 | | $\Sigma D_0$ = 900 | |
| N | STO | 2 | | N = 1000 | |
| | GSB | 0 | | | Konfiguration |
| 1.KZ der Konf.[1] | R/S | | | | 1010 : |
| 2.KZ der Konf.[1] | R/S | | | | fe = 43,20 |
| 3.KZ der Konf.[1] | R/S | | | fb = 50 | $Chi^2$ - Kompo- |
| 4.KZ der Konf.[1] | R/S | | fe | | nente = 1,07 |
| fb | R/S | | $Chi^2$-Komp. | | |
| nach jeder Konf. | R/S | | | | |
| | RCL | 4 | Gesamt-$Chi^2$ | | |

1) KZ = Kennziffer, Eingabe der Konfiguration 0110 z.B.: 0 R/S, 1 R/S, 1 R/S, 0 R/S.

**Programm 22** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 5 alternative Merkmale**

```
001 Lbl 0
    1
    STO 6
    6
005 CHS
    STO i
    GTO 1
    RCL C
    STOx6
010 GTO 2
    Lbl 1
    R/S
    x =0 ?
    GTO(i)
015 RCL B
    STOx6
    GTO 2
    RCL E
    STOx6
020 GTO 3
    Lbl 2
    R/S
    x=0 ?
    GTO(i)
025 RCL D
    STOx6
    GTO 3
    RCL 1
    STOx6
030 GTO 4
    Lbl 3
    R/S
    x=0 ?
    GTO(i)
035 RCL 0
    STOx6
    GTO 4
    RCL 3
039 STOx6
040 GTO 5
    Lbl 4
    R/S
    x=0 ?
    GTO(i)
045 RCL 2
    STOx6
    GTO 5
    RCL 5
    STOx6
050 GTO 6
    Lbl 5
    R/S
    x=0 ?
    GTO(i)
055 RCL 4
    STOx6
    GTO 6
058 Lbl 6
    RCL A
060 ENT
    4
    Y^x
    STO:6
    RCL 6
065 R/S
    ENT
    RCL 6
    -
    x^2
070 RCL 6
    :
    STO+7
    R/S
    GTO 0
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| N | STO A | | N = 2000 | |
| $\Sigma A_1$ | STO B | | $\Sigma A_1$ = 300 | |
| $\Sigma A_0$ | STO C | | $\Sigma A_0$ = 600 | |
| $\Sigma B_1$ | STO D | | $\Sigma B_1$ = 400 | |
| $\Sigma B_0$ | STO E | | $\Sigma B_0$ = 200 | |
| $\Sigma C_1$ | STO 0 | | $\Sigma C_1$ = 1200 | |
| $\Sigma C_0$ | STO 1 | | $\Sigma C_0$ = 800 | |
| $\Sigma D_1$ | STO 2 | | $\Sigma D_1$ = 350 | Konfiguration |
| $\Sigma D_0$ | STO 3 | | $\Sigma D_0$ = 700 | 01101 : |
| $\Sigma E_1$ | STO 4 | | $\Sigma E_1$ = 1500 | fe = 18,9 |
| $\Sigma E_0$ | STO 5 | | $\Sigma E_0$ = 500 | |
| | GSB 0 | | | |
| 1.KZ der Konf.[1] | R/S | | | |
| 2.KZ der Konf.[1] | R/S | | fb = 23 | |
| ⋮ | ⋮ | | | |
| 5.KZ der Konf.[1] | R/S | | | Chi²-Komponente = 0,89 |
| fb | R/S | fe Chi²-Komp. | | |
| nach jeder Konf. | R/S | | | |
| | RCL 7 | Gesamt-Chi² | | |

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration

**Programm 23** (Theorie S. 34 ff., Formel 32, 70, 76)
**KFA für 3 dreifach gestufte Merkmale**

```
001  Lbl 0
     1
     STO 5
     1
005  0
     CHS
     STO i
     GTO 2
     RCL B
010  STOx5
     GTO 4
     Lbl 1
     RCL C
     STOx5
015  GTO 4
     Lbl 2
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
020  ENT
021  1
     -
     x=0 ?
     GTO 1
025  RCL D
     STOx5
     GTO 4
     RCL E
     STOx5
030  GTO 6
     Lbl 3
     RCL 0
     STOx5
     GTO 6
035  Lbl 4
     R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
     ENT
040  1
041  -
     x=0 ?
     GTO 3
     RCL 1
045  STOx5
     GTO 6
     RCL 2
     STOx5
     GTO 7
050  Lbl 5
     RCL 3
     STOx5
     GTO 7
     Lbl 6
055  R/S
     x=0 ?
     GTO(i)
     ENT
     1
060  -
061  x=0 ?
     GTO 5
     RCL 4
     STOx5
065  GTO 7
     Lbl 7
     RCL A
     x²
     STO:5
070  RCL 5
     R/S
     ENT
     RCL 5
     -
075  x²
     RCL 5
     :
     STO+6
     R/S
080  GTO 0
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| N | STO A | | N = 1000 | |
| $\Sigma A_0$ | STO B | | $\Sigma A_0$ = 50 | |
| $\Sigma A_1$ | STO C | | $\Sigma A_1$ = 400 | |
| $\Sigma A_2$ | STO D | | $\Sigma A_2$ = 300 | |
| $\Sigma B_0$ | STO E | | $\Sigma B_0$ = 200 | |
| $\Sigma B_1$ | STO 0 | | $\Sigma B_1$ = 100 | |
| $\Sigma B_2$ | STO 1 | | $\Sigma B_2$ = 700 | |
| $\Sigma C_0$ | STO 2 | | $\Sigma C_0$ = 500 | |
| $\Sigma C_1$ | STO 3 | | $\Sigma C_1$ = 150 | |
| $\Sigma C_2$ | STO 4 | | $\Sigma C_2$ = 250 | Konfiguration 102: |
| | GSB 0 | | | fe = 20,00 |
| 1. KZ der Konf. | R/S | | | |
| 2. KZ der Konf. | R/S | | fb = 32 | $Chi^2$-Komponente = 7,20 |
| 3. KZ der Konf. | R/S | fe | | |
| fb | R/S | $Chi^2$-Komp. | | |
| nach jeder Konfiguration | | | | |
| | R/S | | | |
| | RCL 6 | Gesamt-$Chi^2$ | | |

1) KZ = Kennziffer der Konfiguration

**Programm 24** (Theorie S. 38, Formel 77)
**Produkt-Moment-Korrelation**

```
001 Lbl 1
    P⇄S
    RCL 4
    ENT
005 RCL 6
    ×
    RCL 9
    :
009 RCL 8
010 -
    CHS
    STO 0
    RCL 4
    x²
015 ENT
    RCL 9
017 :
    RCL 5
    -
020 STO 1
    RCL 6
    x²
    ENT
    RCL 9
025 :
    RCL 7
    -
    STO×1
    RCL 1
030 √x
    STO:0
    RCL 0
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2...n}$ 1)<br>$Y_{1,2...n}$ 1) | E↑ [ ]<br>Σ+ [ ]<br>GSB [1]<br>[ ] [ ] | $r_{xy}$ | X = 4; 3; 5; 8;<br>Y = 4; 6; 1; 7; | $r_{xy}$ = 0,29 |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 25** (Theorie S. 38, Formel 77)
**Korrelationsmatrix für 5 Variablen**

```
1. Eingabe der
   Variablen
001 Lbl 0
    R/S
    STO 0
    STO+5
005 R/S
    STO 1
    STO+6
    R/S
    STO 2
010 STO+7
    R/S
    STO 3
    STO+8
    R/S
015 STO 4
    STO+9
    1
    0
019 STO i
020 RCL 0
    GSB 1
    RCL 1
    GSB 1
    RCL 2
025 GSB 1
    RCL 3
    GSB 1
    RCL 4
    GSB 1
030 RCL 0
    ENT
    RCL 1
    ×
    STO+(i)
035 ISZ
    RCL 0
    ENT
    RCL 2
039 ×
040 STO +(i)
    ISZ
    RCL 0
    ENT
    RCL 3
045 ×
    STO+(i)
    ISZ
    RCL 0
    ENT
050 RCL 4
    ×
    STO+(i)
    ISZ
    RCL 1
055 ENT
    RCL 2
    ×
    STO+(i)
059 ISZ
060 RCL 1
    ENT
    RCL 3
    ×
    STO+(i)
065 ISZ
    RCL 1
    ENT
    RCL 4
    ×
070 STO+(i)
    ISZ
    RCL 2
    ENT
    RCL 3
075 ×
    STO+(i)
    ISZ
    RCL 2
```

```
079  ENT
080  RCL 4
     x
     STO+(i)
     ISZ
     RCL 3
085  ENT
     RCL 4
     x
     STO+(i)
     GTO 0
```

2. Unterprogramm

```
090  Lbl 1
     x²
     STO+(i)
     ISZ
     RTN
```

3. Berechnung der Korrelationskoeffizienten

```
095  Lbl 2
     STO 4
     1
     5
     STO 0
100  5
     GSB 7
     GSB 5
     5
     GSB 7
105  7
     GSB 8
     5
     GSB 7
     8
110  GSB 8
     5
     GSB 7
113  9
     GSB 8
115  6
     GSB 7
     GSB 5
     6
     GSB 7
120  8
     GSB 8
     6
     GSB 7
     9
125  GSB 8
     7
     GSB 7
     GSB 5
     7
130  GSB 7
     9
     GSB 8
     8
     GSB 7
135  GSB 5
     1
     5
     STO i
     GTO 6
```

4. Unterprogramm

```
140  Lbl 3
     RCL (i)
     ENT
     RCL 4
     :
145  STO 1
     x²
     RCL 4
     x
     CHS
150  STO 2
     GSB 4
152  RCL (i)
     STO+2
     RCL i
155  ENT
     4
     -
     STO i
     RTN
```

5. Unterprogramm

```
160  Lbl 4
     5
     ENT
     RCL i
     +
165  STO i
     RTN
```

6. Unterprogramm

```
167  Lbl 5
     RCL(i)
     CHS
170  ENT
     RCL 1
     x
     STO 1
     RCL(i)
175  x²
     ENT
     RCL 4
     :
     CHS
180  STO 3
     GSB 4
     RCL(i)
     STO+3
     RCL 3
185  STOx2
     RCL 0
     STO i
188  RCL(i)
     STO+1
190  RCL 1
     ENT
     RCL 2
     √x
     :
195  STO(i)
     1
     STO+0
     RTN
```

7. Abruf de Korrelationen

```
199  Lbl 6
200  RCL(i)
     R/S
     ISZ
     GTO 6
```

8. Unterprogramm

```
204  Lbl 7
205  STO i
     GSB 3
     RTN
```

9. Unterprogramm

```
208  Lbl 8
     STO i
210  GSB 5
     RTN
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| | GSB | 0 | | V = 2;3;5 | |
| $V_{1,2...n}$ 1) | R/S | | | W = 3;4;1 | |
| $W_{1,2...n}$ 1) | R/S | | | X = 4;1;2 | |
| $X_{1,2...n}$ 1) | R/S | | | Y = 2;3;3 | |
| $Y_{1,2...n}$ 1) | R/S | | | Z = 4;2;1 | |
| $Z_{1,2...n}$ 1) | R/S | | | | |
| N | GSB | 2 | $r_{vw}$ 2) | | $r_{vw}$ = -0,79 |
| | R/S | | $r_{vx}$ | | $r_{vx}$ = -0,50 |
| | R/S | | $r_{vy}$ | | $r_{vy}$ = +0,76 |
| | R/S | | $r_{vz}$ | | $r_{vz}$ = -0,93 |
| | R/S | | $r_{wx}$ | | $r_{wx}$ = -0,14 |
| | R/S | | $r_{wy}$ | | $r_{wy}$ = -0,19 |
| | R/S | | $r_{wz}$ | | $r_{wz}$ = +0,50 |
| | R/S | | $r_{xy}$ | | $r_{xy}$ = -0,94 |
| | R/S | | $r_{xz}$ | | $r_{xz}$ = +0,79 |
| | R/S | | $r_{yz}$ | | $r_{yz}$ = -0,94 |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

1) Eingabereihenfolge: $V_1$, $W_1$, $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, $V_2$, $W_2$, $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ etc.
2) Hier rechnet das Programm ca. 50 sec.

**Programm 26** (Theorie S. 39, Formel 79)
**Rangkorrelation**

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 1
     ENT
     R/S
     -
005  x²
     STO+0
007  1
     STO+1
     RTN
2. Ermittlung
   von R
010  Lbl 2
     6
012  ENT
     RCL 0
     x
015  RCL 1
     ENT
     3
     Y^x
     RCL 1
020  -
     :
     1
     -
     CHS
025  R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| $Rx_{1,2\ldots n}$ 1)<br>$Ry_{1,2\ldots n}$ 1) | GSB<br>R/S<br>GSB<br> | 1<br><br>2<br> | Rxy | Rx=1;3;5;2;4<br>Ry=3;4;5;2;1 | Rxy = 0,3000 |

1) Eingabereihenfolge: $R_{x_1}$, $R_{y_1}$, $R_{x_2}$, $R_{y_2}$ etc.

**Programm 27** (Theorie S. 95, Formel 153)
**Durchschnittliche Rangkorrelation**

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  GTO 1
     Lbl 1
     R/S
     x²
     STO+2
010  GTO 1
2. Ermittlung
   von R̄
011  Lbl 2
012  1
     2
     STOx2
015  RCL 0
     STO:2
     ENT
     1
     -
020  STO:2
     RCL 1
     STO:2
     x²
     ENT
025  1
026  -
     STO:2
     RCL 1
     ENT
030  4
     x
     2
     +
     RCL 0
035  x
     STO 3
     RCL 0
     ENT
     1
040  -
041  STO:3
     RCL 1
     ENT
     1
045  -
     STO:3
     RCL 3
     STO-2
     1
050  ENT
     RCL 2
     +
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| k | GSB | 0 | | k = 5 | |
| N | R/S | | | N = 7 | |
| alle $\sum R$ | R/S | | | $\sum R$: 23; 8; 25; | |
| | GSB | 2 | $\bar{R}$ | 12; 10; 34; | |
| | | | | 28 | $\bar{R}$ = 0,83 |
| | | | | | |
| | | | | | |

**Programm 28** (Theorie S. 43 f., Formel 85)
**Konkordanzkoeffizient für maximal 20 Objekte**

1. Vorbereitung

```
001 Lbl 1
    5
    STO i
    R/S
```

2. Einspeichern der Rangsummen, Ermittlung von N

```
005 Lbl 2
    STO+1
    STO(i)
    1
    STO+3
010 ISZ
    RTN
```

3. Einspeichern von k, Ermittlung $\sum R_M$

```
012 Lbl 3
    STO 4
    RCL 1
015 ENT
    RCL 3
    :
    STO 2
    2
020 4
    STO i
    0
    STO 1
```

```
024  GTO 4
4. Ermittlung
   von(∑R-∑R_M)²
   u. Summierung
025  Lbl 4
     RCL(i)
     x=0 ?
     GTO 5
     ENT
030  RCL 2
     -
     x²
033  STO+1
     DSZ
035  RCL i
     ENT
     4
     -
     x=0 ?
040  GTO 6
     GTO 4
     Lbl 5
     DSZ
     GTO 4
045  Lbl 6
     RCL 1
     R/S
5. Berechnung
   von W
     Lbl 7
     RCL 4
050  x²
     ENT
     1
     2
054  :
055  RCL 3
     ENT
     3
     Y^x
     RCL 3
060  -
     x
     STO:1
     RCL 1
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle ∑R<br>k | GSB 1<br>GSB 2<br>GSB 3<br>GSB 7 | Zähler von W<br>W | Rangsummen:<br>$R_1$=14, $R_2$=13,<br>$R_3$=8, $R_4$=17,<br>$R_5$=24, $R_6$=36,<br>$R_6$=31, $R_7$=37<br>k = 5 | Zähler =870,00<br>W = 0,829 |

**Porgramm 29** (Theorie S. 45, Formel 88, 90)
**Durchschnittliche Korrelation bei gleichen n**

```
1. Eingabe
   aller r
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     1
005  +
     1
     ENT
     RCL 0
009  -
010  :
     LN
     ENT
     2
     :
015  STO+2
     1
     STO+1
     RTN
2. Berechnung
   von r̄
019  Lbl 2
020  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     :
     2
025  x
     e^x
027  STO 0
     1
     -
030  RCL 0
     ENT
     1
     +
     :
035  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle r | GSB 1<br>GSB 2 | r̄ | $r_1$= 0,51,<br>$r_2$= 0,58,<br>$r_3$= 0,90,<br>$r_4$= -0,40 | r̄ = 0,51 |

**Programm 30** (Theorie S. 45, Formel 88, 89)
**Durchschnittliche Korrelation bei ungleichen n**

```
1. Eingabe
   der r u.n
001  Lbl 1
     STO 0
     ENT
     1
005  +
     1
     ENT
     RCL 0
     -
010  :
     LN
     ENT
     2
     :
015  STO 0
     R/S
     ENT
     3
     -
020  STO+1
021  STOx0
     RCL 0
     STO+2
     RTN
2. Berechnung
   von r̄
025  Lbl 2
     RCL 2
     ENT
     RCL 1
     :
030  2
     x
     e^x
     STO 0
     1
035  -
     RCL 0
     ENT
     1
     +
040  :
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_1, r_1, r_3 \ldots$ [1]<br>$n_1, n_2, n_3 \ldots$ [1] | GSB 1<br>R/S<br>GSB 2 | $\bar{r}$ | $r_1 = 0{,}28$;<br>$r_2 = 0{,}45$;<br>$n_1 = 39$;<br>$n_2 = 18$; | $\bar{r} = 0{,}33$ |

1) Eingabereihenfolge: $r_1$, $n_1$, $r_2$, $n_2$ etc.

**Programm 31** (Theorie S. 45, Formel 91)
**Partialkorrelation**

```
Eingabe der
Korrelationen,
Errechnung der
Partialkorrela-
tion
001  Lbl 1
     STO 0
003  ENT
     R/S
005  STO 1
     x
     R/S
     -
     CHS
010  STO 2
     1
     ENT
     RCL 0
     x²
015  -
     1
     ENT
018  RCL 1
     x²
020  -
     x
     √x
     STO:2
     RCL 2
025  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_{1-3}$<br>$r_{2-3}$<br>$r_{1-2}$ | GSB 1<br>R/S<br>R/S | $r_{1-2(3)}$ | $r_{1-3} = 0{,}81$<br>$r_{2-3} = 0{,}85$<br>$r_{1-2} = 0{,}69$ | $r_{1-2(3)} = 0{,}0049$ |

**Programm 32** (Theorie S. 17 f., Formel 42, 46, 47)
**Signifikanzprüfung für den Unterschied zweier Korrelationen**

1. Daten-
eingabe

```
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
     R/S
     STO 3
```

2. Ermittlung
der Differenz
u. des Stan-
dardfehlers

```
009  RCL 0
010  STO 4
     GSB 2
     STO 0
     RCL 1
     STO 4
015  GSB 2
     ENT
     RCL 0
     -
     ABS
020  STO 0
     3
     STO-2
     STO-3
     RCL 2
025  1/x
     ENT
     RCL 3
     1/x
     +
030  √x
     STO 1
     R/S
```

3. Unterpro-
gramm:
Fisher'sche
Z-Transfor-
mation

```
033  Lbl 2
     ENT
035  1
     +
     1
     ENT
     RCL 4
040  -
     :
     LN
     ENT
     2
045  :
     RTN
```

4. Prüfung auf
5%-Niveau

```
047  Lbl 3
     1
     .
050  9
     6
     ENT
     RCL 1
     ×
055  RCL 0
     -
     CHS
     R/S
```

5. Prüfung auf
1%-Niveau

```
059  Lbl 4
060  2
     .
     5
     8
     ENT
065  RCL 1
     ×
     RCL 0
     -
     CHS
070  R/S
```

6. Prüfung auf
0.1% Niveau

```
071  Lbl 5
     3
     .
     2
075  9
     ENT
     RCL 1
     ×
     RCL 0
080  -
     CHS
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | GSB | 1 | | $r_1$ = 0,846 | |
| $r_2$ | R/S | | | $r_2$ = 0,671 | |
| $N_1$ | R/S | | | $N_1$ = 145 | |
| $N_2$ | R/S | | | $N_2$ = 223 | |
| | GSB | 3 | Rest 5% 1) | | Rest 5% =0,218 |
| | GSB | 4 | Rest 1% 1) | | Rest 1% =0,152 |
| | GSB | 5 | Rest 0,1% 1) | | Rest 0,1%=0,075 |

1) Signifikanz liegt vor, wenn der Rest > 0 ist.

**Programm 33** (Theorie S. 47, Formel 93, 94)
**Lineare Regression**

1. Einspeichern der $x_i$ u. $y_i$
2. Errechnung von a u. b

```
001  Lbl 1
     P⇄S
     RCL 9
     ENT
005  RCL 8
     ×
     RCL 4
     ENT
009  RCL 6
010  ×
     -
     STO 0
     RCL 9
     ENT
015  RCL 5
     ×
     RCL 4
     x²
     -
020  STO:0
     RCL 0
022  STO C
     R/S
     P⇄S
025  x̄
     STO A
     X⇄Y
     STO B
     P⇄S
030  RCL A
     ENT
     RCL 0
     ×
     RCL B
035  -
     CHS
     STO 1
     R/S
```

3. Prognose

```
     Lbl 2
040  ENT
     RCL C
     ×
     RCL 1
     +
045  R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_{1,2...n}$ 1) | ENT | | | Y = 2;4;7 | b = 1,500 |
| $X_{1,2...n}$ 1) | Σ+ | | | X = 8;7;9 | a = -7,667 |
| | GSB | 1 | b | $X_i$ = 10 | $Y_i$ = 7,333 |
| | R/S | | a | | |
| $X_i$ | GSB | 2 | $Y_i$ | | |
| | | | | | |

1) Eingabereihenfolge: $Y_1$, $X_1$, $Y_2$, $X_2$ etc.

**Programm 34** (Theorie S. 48, Formel 95)
**Vertrauensbereich für lineare Regression**

Eingabe der Daten u. Berechnung von △

```
001  Lbl 1
     STO 0
     R/S
     STO 1
005  R/S
     STO 2
007  R/S
     STO 3
     R/S
010  STO 4
     R/S
     STO 5
     R/S
     STO 6
015  RCL 0
016  ENT
     RCL 2
     x²
     ×
020  STO 7
     RCL 1
     x²
     ENT
     RCL 5
025  x²
     ×
     RCL 0
     ×
     STO-7
030  RCL 0
     ENT
     2
     -
```

```
034  STO:7
035  RCL 3
     ENT
     RCL 4
     -
     x²
040  RCL 0
     :
     RCL 1
     x²
     :
045  1
046  +
     RCL 0
     1/x
     +
050  STOx7
     RCL 7
052  √x
     ENT
     RCL 6
055  x
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| N | GSB 1 | | N = 10 | |
| $SD_{xN}$ | R/S | | $SD_{XN}$ = 12 | |
| $SD_{yN}$ | R/S | | $SD_{YN}$ = 0,7 | |
| $X_i$ | R/S | | $X_i$ = 140 | |
| $\overline{X}$ | R/S | | $\overline{X}$ = 100 | |
| b | R/S | | b = 0,03 | |
| $t_{pl2}$ | R/S | △ | $t_{p/z}$ = 2,3 | △ = 2,30 |
| | | | | |

**Programm 35** (Theorie S. 49 f., Formel 97)
**Quadratische Regression**

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     R/S
     STO 0
     STO+1
005  ENT
     R/S
     STO 2
     STO+3
     x
010  STO+4
     RCL 0
     x²
     STO+5
     x²
015  STO+6
     RCL 0
     ENT
018  3
     yˣ
020  STO+7
     RCL 0
     x²
     ENT
     RCL 2
025  x
     STO+8
     1
     STO+9
     GTO 0

2. Berechnung
   der Regres -
   sionskoeffi-
   zienten
030  Lbl 1
     RCL 5
032  STO:8
     STO:6
     ENT
035  RCL 7
     :
     1/x
     STO 0
     RCL 1
040  STO:4
     STO:7
     ENT
     RCL 5
     :
045  1/x
     STO 2
     RCL 9
     STO:3
     STO:1
050  STO:5
051  RCL 4
     ENT
     RCL 3
     -
055  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     -
     :
060  STO A
     RCL 5
     ENT
     RCL 7
     -
065  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     -
```

```
070  STO B
     RCL 8
     ENT
     RCL 3
     -
075  RCL 0
     ENT
     RCL 1
     -
     :
080  STO C
     RCL 5
     ENT
     RCL 6
     -
085  RCL 0
     ENT
     RCL 1
     -
     :
090  STO D
     RCL C
     ENT
     RCL A
     -
095  RCL B
     ENT
     RCL D
     -
     :
100  STO E
     R/S
     RCL 5
     ENT
     RCL 6
105  -
     RCL E
     x
     RCL 8
     +
110  RCL 3
     -
     RCL 0
     ENT
     RCL 1
115  -
     :
     STO D
     R/S
     ENT
120  RCL 1
     x
     RCL E
     ENT
     RCL 5
125  x
     +
     RCL 3
     -
129  CHS
130  STO C
     R/S
3. Prognose
     Lbl 2
     STO 0
     ENT
135  RCL D
     x
     RCL 0
     x²
     ENT
140  RCL E
     x
     +
     RCL C
     +
145  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $X_{1,2,\ldots n}$ [1] $Y_{1,2\ldots n}$ [1] | GSB 0 | | X = 2;4;5 | |
| | R/S | | Y = 4;8;15 | |
| | R/S | | | |
| | GSB 1 | $b_2$ | | $b_2$ = 1,67 |
| | R/S | $b_1$ | | $b_1$ = -8,00 |
| | R/S | a | | a = 13,33 |
| $X_i$ | GSB 2 | $Y_i$ | $X_i$ = 10 | $Y_i$ = 100,00 |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$, etc.

**Programm 36** (Theorie S. 50 f., Formel 99)
**Kubische Regression**

```
1. Daten-
   eingabe
001  Lbl 0
     R/S
     STO A
     STO+1
005  ENT
006  R/S
     STO+3
     x
     STO+4
010  RCL A
     x
     STO+5
013  RCL A
     x
015  STO+6
     RCL A
     x²
     STO+0
     x²
020  STO+2
     RCL A
     ENT
     3
     yˣ
025  STO+7
     x²
```

```
027  STO+8
     RCL A
     ENT
030  5
     y^x
     STO+9
     P⇄S
     1
035  STO+0
     P⇄S
     GTO 0
```

2. Regressions-koeffizienten

```
     Lbl 1
     P⇄S
040  RCL 0
     STO A
     P⇄S
     RCL 0
     ENT
045  RCL 1
     :
     RCL 1
     ENT
     RCL A
050  :
     -
     STO B
     RCL 4
     ENT
055  RCL 1
     :
     RCL 3
     ENT
     RCL A
060  :
     -
     STO C
     RCL 0
     ENT
065  RCL A
     :
     RCL 7
     ENT
     RCL 1
070  :
     -
072  STO D
     RCL 7
     ENT
075  RCL A
     :
     RCL 2
     ENT
     RCL 1
080  :
     -
     STO E
     1
     0
085  STO i
     RCL 7
     ENT
     RCL 0
     :
090  RCL 1
     ENT
     RCL A
     :
     -
095  STO(i)
     ISZ
     RCL 5
     ENT
     RCL 0
100  :
     RCL 3
     ENT
     RCL A
     :
105  -
     STO(i)
     ISZ
     RCL 0
     ENT
110  RCL A
     :
     RCL 2
     ENT
     RCL 0
115  :
     -
     STO(i)
     ISZ
     RCL 7
120  ENT
     RCL A
     :
     RCL 9
     ENT
125  RCL 0
     :
     -
     STO(i)
     ISZ
130  RCL 2
     ENT
     RCL 7
     :
     RCL 1
135  ENT
     RCL A
     :
     -
     STO(i)
140  ISZ
     RCL 6
     ENT
     RCL 7
     :
145  RCL 3
     ENT
     RCL A
     :
     -
150  STO(i)
     ISZ
     RCL 0
     ENT
     RCL A
155  :
     RCL 9
     ENT
     RCL 7
     :
160  -
     STO(i)
     ISZ
     RCL 7
     ENT
165  RCL A
     :
     RCL 8
168  ENT
     RCL 7
170  :
     -
     STO(i)
     P⇄S
     1
175  0
     STO i
     RCL D
     ENT
     RCL B
180  :
     RCL 2
     ENT
     RCL 0
     :
185  -
     STO(i)
     ISZ
     RCL 1
     ENT
190  RCL 0
     :
     RCL C
     ENT
     RCL B
195  :
     -
     STO(i)
     ISZ
     ISZ
200  RCL 3
     ENT
     RCL 0
     :
     RCL E
205  ENT
     RCL B
     :
     -
     STO(i)
210  ISZ
     RCL 5
     ENT
     RCL 4
     :
215  RCL C
```

```
216  ENT
     RCL B
     :
     -
220  STO(i)
     ISZ
     RCL D
     ENT
     RCL B
225  :
     RCL 6
     ENT
     RCL 4
     :
230  -
     STO(i)
     RCL 7
     ENT
     RCL 4
235  :
     RCL E
     ENT
     RCL B
     :
240  -
     STO B
     P≷S
     RCL 4
     ENT
245  RCL 5
     :
     RCL 1
     ENT
     RCL 0
250  :
     -
     STO C
     RCL 3
     ENT
255  RCL 0
     :
     RCL B
     ENT
     RCL 5
260  :
     -
     RCL C
     :
     1/x
265  STO C
     R/S
     RCL B
     ENT
     RCL 5
270  :
     RCL C
     x
     RCL 4
     ENT
275  RCL 5
     :
     +
     STO D
     R/S
280  P≷S
     RCL 5
     ENT
     RCL 4
284  :
285  STO 0
     RCL 6
     ENT
     RCL 4
     :
290  RCL D
     x
     STO+0
     RCL 7
     ENT
295  RCL 4
     :
     RCL C
     x
     STO+0
300  RCL 0
     STO B
     R/S
     P≷S
     RCL 7
305  STO:6
     STO:2
     STO:9
     STO:8
     RCL B
310  STOx2
     RCL 2
     STO-6
     RCL D
     STOx9
315  RCL 9
     STO-6
     RCL C
318  STOx8
     RCL 8
320  STO-6
     RCL 6
     R/S
```

3. Prognose

```
     Lbl 2
     STO 1
325  ENT
     RCL B
     x
     STO 2
     RCL 1
330  x²
     ENT
     RCL D
     x
     STO+2
335  RCL 1
     ENT
     3
     yˣ
     RCL C
340  x
     STO+2
     RCL 6
     STO+2
     RCL 2
345  R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $X_1, X_2, \ldots X_m$ [1] | GSB | 0 | | X = 2;5;8;6 | |
| $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ [1] | R/S | | | Y = 4;9;2;3 | |
| | R/S | | | | |
| | GSB | 1 | $b_3$ | | $b_3$ = 0,63 |
| | R/S | | $b_2$ | | $b_2$ = -10,04 |
| | R/S | | $b_1$ | | $b_1$ = 47,58 |
| | R/S | | a | | a = -56,00 |
| $X_i$ | GSB | 2 | $Y_i$ | | $Y_i$ = 40,67 |
| | | | | | |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 37** (Theorie S. 52 f., Formel 100)
**Potenzregression**

1. Dateneingabe

001 Lbl 0
LOG
ENT
R/S
005 LOG
$\sum+$
RTN

2. Errechnung der Regressionskoeffizienten

008 Lbl 1
P≷S
010 RCL 9
ENT
RCL 8
×
RCL 4
015 ENT
RCL 6
×
-
STO 0
020 RCL 9
ENT
RCL 5
×
RCL 4
025 $x^2$
-
STO:0
RCL 0
STO C
030 R/S
P≷S
$\bar{x}$
STO A
x⇄y
035 STO B
P≷S
RCL A
ENT
RCL 0
040 ×
RCL B
-
CHS
$10^x$
045 STO 1
R/S

3. Prognose

047 Lbl 2
ENT
RCL C
050 $y^x$
RCL 1
×
R/S

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $Y_{1,2...n}$ [1] | GSB | 0 | | | |
| $X_{1,2...n}$ [1] | R/S | | | Y = 5;6;7 | |
| | GSB | 1 | b | X = 3;6;9 | b = 0,302 |
| | R/S | | a | | a = 3,564 |
| $X_i$ | GSB | 2 | $Y_i$ | $X_i$ = 10 | $Y_i$ = 7,138 |
| | | | | | |

1) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

**Programm 38** (Theorie S. 54, Formel 101)
**Exponentialregression**

1. Dateneingabe

001 Lbl 0
LN
ENT
R/S
005 $\sum+$
RTN

2. Errechnung der Regressionskoeffizienten

007 Lbl 1
P≷S
RCL 9
010 ENT
RCL 8
012 ×
RCL 4
ENT
015 RCL 6
×
-
STO 0
RCL 9
020 ENT
021 RCL 5
×
RCL 4
$x^2$
025 -
STO:0
RCL 0
STO C
R/S

```
030  P≷S
     x̄
     STO A
     x⇄y
     STO B
035  P≷S
     RCL A
     ENT
038  RCL 0
     x
040  RCL B
     -
     CHS
     e^x
     STO 1
045  R/S
```

3. Prognose

```
046  Lbl 2
     ENT
     RCL C
     x
050  STO 2
     1
     e^x
053  ENT
     RCL 2
055  y^x
     RCL 1
     x
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $Y_{1,2\ldots n}$ [1] | GSB 0 | | Y=2,1;1,6;1,2 | |
| $X_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | X=0,7;1,3;2,0 | |
| | GSB 1 | b | | b = -0,430 |
| | R/S | a | | a = 2,824 |
| $X_i$ | GSB 2 | $Y_i$ | $X_i$ = 5 | $Y_i$ = 0,329 |

1) Eingabereihenfolge: $Y_1$, $X_1$, $Y_2$, $X_2$ etc.

**Programm 39** (Theorie S. 55, Formel 102)
**Logarithmische Regression**

1. Daten-eingabe

```
001  Lbl 0
     ENT
     R/S
     LN
005  Σ+
     RTN
```

2. Berechnung von a u. b

```
007  Lbl 1
     P≷S
     RCL 9
010  ENT
     RCL 8
012  x
     RCL 4
     ENT
     RCL 6
     x
     -
     STO 0
     RCL 9
020  ENT
     RCL 5
     x
     RCL 4
     x^2
025  -
     STO:0
027  RCL 0
     STO C
     R/S
030  P≷S
     x̄
     STO A
     x⇄y
     STO B
035  P≷S
     RCL A
     ENT
     RCL 0
     x
040  RCL B
041  -
     CHS
     STO 1
     R/S
```

3. Prognose

```
045  Lbl 2
     LN
     ENT
     RCL C
     x
050  RCL 1
     +
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $Y_{1,2\ldots n}$ [1] | GSB 0 | | Y=4,9;5,0;4,0 | |
| $X_{1,2\ldots n}$ [1] | R/S | | X=1,2;2,1;2,5 | |
| | GSB 1 | b | | b = -0,883 |
| | R/S | a | | a = 5,175 |
| $X_i$ | GSB 2 | $Y_i$ | $X_i$ = 5 | $Y_i$ = 3,754 |

1) Eingabereihenfolge: $Y_1$, $X_1$, $Y_2$, $X_2$ etc.

**Programm 40** (Theorie S. 56, Formel 103)
**Regressionsgüte**

1. Dateneingabe

```
001  Lbl 0
     R/S
     STO C
     R/S
005  STO D
```

2. Ermitteln von S

```
006  RCL 1
     x=0 ?
     GTO 1
     STO 0
010  RCL C
     ENT
     RCL 2
     x
     STO+0
015  1
     4
     STO i
     GSB 9
     GTO 1
020  Lbl 1
     RCL 3
     x=0 ?
     GTO 2
     STO 0
025  RCL C
     ENT
     RCL 4
     x
     RCL C
030  x²
     ENT
     RCL 5
     x
     +
035  STO+0
036  1
     5
     STO i
     GSB 9
040  GTO 2
     Lbl 2
     RCL 6
     x=0 ?
     GTO 3
045  STO 0
     RCL C
     ENT
     RCL 7
     x
050  RCL C
     x²
     ENT
     RCL 8
     x
055  +
     STO+0
     RCL C
     ENT
     3
060  yˣ
     RCL 9
     x
     STO+0
     1
065  6
     STO i
     GSB 9
     GTO 3
     Lbl 3
070  P⇄S
     RCL 0
     x=0 ?
     GTO 4
074  RCL C
075  ENT
     RCL 1
     yˣ
     RCL 0
     x
080  P⇄S
     STO 0
     1
     7
     STO i
085  GSB 9
     GTO 4
     Lbl 4
     P⇄S
     RCL 3
090  x=0 ?
     GTO 5
     ENT
     RCL C
     x
095  STO E
     1
     eˣ
     ENT
     RCL E
100  yˣ
     RCL 2
     x
     P⇄S
     STO 0
105  1
     8
     STO i
     GSB 9
     GTO 5
110  Lbl 5
     RCL A
112  x=0 ?
     GTO 0
     STO 0
115  RCL C
     LN
     ENT
     RCL B
     x
120  STO+0
     1
     9
     STO i
     GSB 9
125  GTO 0
```

3. Abrufen von S

```
126  Lbl 6
     1
     4
     STO i
130  GTO 7
     Lbl 7
     RCL(i)
     R/S
     ISZ
135  GTO 7
```

4. Unterprogramm

```
136  Lbl 9
     RCL 0
     ENT
     RCL D
140  -
     x²
     STO+(i)
     RTN
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Eingabedaten | Ergebnisse |
| lin.R.: a[4] | STO 1 | | a = 0,5 | |
| b | STO 2 | | b = 2 | |
| quadr.R.: a[4] | STO 3 | | a = 0,4 | |
| $b_1$ | STO 4 | | $b_1$= 0,3 | |
| $b_2$ | STO 5 | | $b_2$= 1 | |
| kub.R.: a[4] | STO 6 | | a = 3 | |
| $b_1$ | STO 7 | | $b_1$= 0,1 | |
| $b_2$ | STO 8 | | $b_2$= 2 | |
| $b_3$ | STO 9 | | $b_3$= 0,2 | |
| Speicherum- | | | | |
| stellung [1] | P⇄S | | | |
| Potenz-R.: a[4] | STO 0 | | a = 4 | |
| b | STO 1 | | b = 0,6 | |
| Exp.-R.: a | STO 2 | | a = 3 | |
| b[4] | STO 3 | | b = 1,5 | |
| log. R.: a[4] | STO A | | a = 5 | |
| b | STO B | | b = 6 | |
| Speicherum- | | | | |
| stellung [1] | P⇄S | | | |
| | GSB 0 | | | |
| $X_{1,2...n}$ [3] | R/S | | X = 3;6;10 | |
| $Y_{1,2...n}$ [3] | R/S | | Y = 4;8;11 | S = |
| | GSB 6 | S linear [2] | | 116,75 |
| | R/S | S quadr.[2] | | 9489,49 |
| | R/S | S kub.[2] | | 167240,93 |
| | R/S | S Potenz[2] | | 52,02 |
| | R/S | S Exponent[2] | | $9,61 \cdot 10^{13}$ |
| | R/S | S log.[2] | | |
| | | | | 178,79 |

1) Falls eine Potenz- Exponential- oder logarithmische Regression geprüft wird, ist jeweils vor und nach Eingabe der entsprechenden Koeffizienten eine Speicherumstellung vorzunehmen.

2) Die Prüfgrößen S für die 6 Regressionsarten erscheinen immer in dieser Reihenfolge. Wurden für eine oder mehrere Regressionen keine Koeffizienten eingegeben, erscheinen Nullen. Das Programm überspringt dann die nicht relevanten Teile.

3) Eingabereihenfolge: $X_1$, $Y_1$, $X_2$, $Y_2$ etc.

4) Diese Koeffizienten dürfen nicht 0 sein. Ansonsten empfiehlt es sich, mit sehr kleinen Näherungswerten zu arbeiten.

**Programm 41** (Theorie S. 56 f., Formel 105, 106, 107)
**Multiple Regression für 2 unabhängige Variablen**

```
1. Berechnung
   der Regres-
   sionskoeffi-
   zienten
001 Lbl 1
    RCL 1
    ENT
    RCL 2
005 x
    RCL 0
    -
    STO 9
    RCL 2
010 x²
    ENT
    1
    -
014 STO:9
015 RCL 9
    R/S
    1
    0
    STO i
020 RCL 0
    ENT
    RCL 2
    x
    RCL 1
025 -
    STO(i)
    RCL 2
    x²
    ENT
030 1
    -
    STO:(i)
    RCL(i)
    R/S
2. Prognose
035 Lbl 2
    ENT
    RCL 3
    -
    RCL 6
040 :
    RCL 9
    x
    STO 0
044 R/S
045 ENT
    RCL 5
    -
    RCL 8
    :
050 RCL(i)
    x
    STO+0
    RCL 0
    ENT
055 RCL 7
    x
    RCL 4
    +
    R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $r_{xy}$ | STO 0 | | $r_{xy}$ = -0,831 | |
| $r_{yz}$ | STO 1 | | $r_{yz}$ = -0,909 | |
| $r_{xz}$ | STO 2 | | $r_{xz}$ = 0,772 | |
| $\bar{X}$ | STO 3 | | $\bar{X}$ = 22,2 | |
| $\bar{Y}$ | STO 4 | | $\bar{Y}$ = 2,8 | |
| $\bar{Z}$ | STO 5 | | $\bar{Z}$ = 13,1 | |
| $SD_x$ | STO 6 | | $SD_x$ = 6,46 | |
| $SD_y$ | STO 7 | | $SD_y$ = 1,317 | |
| $SD_z$ | STO 8 | | $SD_z$ = 4,067 | |
| | GSB 1 | $b_x$ | | |
| | R/S | $b_z$ | | $b_x$ = -0,32 |
| $X_i$ | GSB 2 | | | $b_z$ = -0,662 |
| $Z_i$ | R/S | $Y_i$ | $X_i$ = 30 | |
| | | | $Z_i$ = 14 | $Y_i$ = 2,098 |

**Programm 42** (Theorie S. 58, Formel 109, 110, 111, 112)
**Regression dreier unabhängiger Variablen mit einer abhängigen**

1. Koeffizienten

```
001 Lbl 0
    1
    ENT
    RCL 4
005 x²
    -
    RCL 1
    ×
    STO 6
010 RCL 2
    ENT
    RCL 4
    ×
    RCL 0
015 -
    RCL 3
    ×
    STO+6
    RCL 0
020 ENT
    RCL 4
    ×
    RCL 2
    -
025 RCL 5
    ×
    STO+6
    2
    ENT
030 RCL 0
    ×
    RCL 2
    ×
    RCL 4
035 ×
    STO 7
    1
038 ENT
    RCL 0
040 x²
    -
    RCL 2
    x²
    -
045 RCL 4
    x²
    -
    STO+7
    RCL 7
050 STO:6
    RCL 6
    R/S
    RCL 2
    ENT
055 RCL 4
    ×
    RCL 0
    -
    RCL 6
060 ×
    STO 7
    RCL 5
    ENT
    RCL 4
065 ×
    STO-7
    RCL 3
    STO+7
    1
070 ENT
    RCL 4
    x²
    -
    STO:7
075 RCL 7
076 R/S
    ENT
    RCL 4
    ×
080 RCL 6
    ENT
    RCL 2
    ×
    +
085 RCL 5
    -
    CHS
    STO 8
    R/S
```

2. Multiple Korrelation

```
090 ENT
    RCL 5
    ×
    RCL 7
    ENT
095 RCL 3
    ×
    +
    RCL 6
    ENT
100 RCL 1
    ×
    +
    √x
    R/S
```

3. Prognose

```
105 Lbl 1
    RCL 6
    STO A
    RCL 7
    STO B
110 RCL 8
    STO C
    P≷S
    GTO 2
    Lbl 2
115 R/S
    ENT
    RCL 4
    -
    RCL 0
120 :
    RCL B
    ×
    STO 8
    R/S
125 ENT
    RCL 7
    -
    RCL 3
    :
130 RCL A
    ×
    STO+8
    R/S
    ENT
135 RCL 6
    -
    RCL 2
    :
    RCL C
140 ×
    STO+8
    RCL 1
    STO×8
    RCL 5
145 STO+8
    RCL 8
    GTO 2
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_{wx}$ | STO | 0 | | $r_{wx}$ = -0,47 | |
| $r_{wy}$ | STO | 1 | | $r_{wy}$ = 0,206 | |
| $r_{wz}$ | STO | 2 | | $r_{wz}$ = -0,432 | |
| $r_{xy}$ | STO | 3 | | $r_{xy}$ = -0,48 | |
| $r_{xz}$ | STO | 4 | | $r_{xz}$ = 0,469 | |
| $r_{yz}$ | STO | 5 | | $r_{yz}$ = -0,769 | |
| | P⇄S | | | | |
| $SD_x$ | STO | 0 | | $SD_x$ = 0,536 | |
| $SD_y$ | STO | 1 | | $SD_y$ = 1,35 | |
| $SD_z$ | STO | 2 | | $SD_z$ = 0,475 | |
| $SD_w$ | STO | 3 | | $SD_w$ = 0,514 | |
| $\overline{X}$ | STO | 4 | | $\overline{X}$ = 0,131 | |
| $\overline{Y}$ | STO | 5 | | $\overline{Y}$ = 3,4 | |
| $\overline{Z}$ | STO | 6 | | $\overline{Z}$ = 0,031 | |
| $\overline{W}$ | STO | 7 | | $\overline{W}$ = 0,111 | |
| | P⇄S | | | | |
| | GSB | 0 | $b_w$ | | $b_w$ = -0,232 |
| | R/S | | $b_x$ | | $b_x$ = -0,232 |
| | R/S | | $b_z$ | | $b_z$ = -0,760 |
| | R/S | | R | | R = 0,805 |
| vor der ersten | | | | | |
| Prognose | GSB | 1 | | | |
| $X_i$ | R/S | | | $X_i$ = -0,11 | |
| $W_i$ | R/S | | | $W_i$ = 0,89 | |
| $Z_i$ | R/S | | $Y_i$ | $Z_i$ = 0,06 | $Y_i$ = 3,005 |

**Programm 43** (Theorie S. 62, Formel 116, 117, 118)
**Invertierte Elemente einer 3 x 3-Korrelationsmatrix**

```
1. Berechnung
   von r^ww
001  Lbl 1
     1
     ENT
     RCL 1
005  x²
     -
     STO 4
008  1
     ENT
010  RCL 2
     x²
     -
     STO 5
     RCL 1
015  ENT
     RCL 2
017  x
     RCL 3
     -
020  CHS
     STO 6
     RCL 1
     ENT
     RCL 3
025  x
026  RCL 2
     -
     CHS
     STO 7
030  RCL 4
     ENT
     RCL 5
     x
     RCL 6
```

```
035  :
     RCL 6
     -
     CHS
     STO 8
040  RCL 4
     ENT
     RCL 6
     :
     RCL 2
045  x
     RCL 1
047  -
     RCL 7
     x
050  RCL 8
     :
     1
     -
     CHS
055  RCL 4
     :
     R/S
```

2. Berechnung von $r^{xx}$

```
058  RCL 6
     ENT
060  RCL 8
     :
     1
     -
     CHS
065  RCL 4
     :
067  R/S
```

3. Berechnung von $r^{zz}$

```
068  RCL 4
     ENT
070  RCL 6
     :
     RCL 8
     :
     CHS
075  R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| $r_{wx}$ | STO | 1 | | $r_{wx}$ = -0,470 | |
| $r_{wz}$ | STO | 2 | | $r_{wz}$ = -0,432 | |
| $r_{xz}$ | STO | 3 | | $r_{xz}$ = 0,469 | |
| | GSB | 1 | $r^{ww}$ | | $r^{ww}$ = 1,386 |
| | R/S | | $r^{xx}$ | | $r^{xx}$ = 1,445 |
| | R/S | | $r^{zz}$ | | $r^{zz}$ = 1,384 |
| | | | | | |

**Programm 44** (Theorie S. 65 f.)
**Restkorrelationsmatrix**

1. Vorbereitung

```
001  Lbl 1
     3
     STO i
     R/S
```

2. Eingabe der Ladungszahlen

```
005  Lbl 2
006  STO(i)
     ISZ
     RTN
```

3. Vorbereitung

```
009  Lbl 3
010  2
     STO 1
     GTO 4
```

4. Restkorrelationen

```
013  Lbl 4
     1
015  STO+1
     RCL 1
     STO i
     RCL(i)
     STO 2
020  GTO 5
     Lbl 5
     RCL 2
     ENT
     RCL (i)
025  x
     R/S
     -
     CHS
     R/S
030  ISZ
     GTO 5
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung |
|---|---|---|---|
| $a_{1,2,\ldots}$ 1)<br>$r_{1,2,3,\ldots}$ 2)<br>nach jeder Spalte | GSB 1<br>GSB 2<br>GSB 3<br>R/S<br>R/S<br><br>GSB 4 | $r_{Rest}$ | Ladungszahlen:<br>0,86; 0,45; 0,93<br>Korrelationsmatrix:<br>(0,95)<br>0,95 (0,76)<br>0,53 0,76 (0,81)<br>Rest-Matrix:<br>(0,21)<br>0,56 (0,56)<br>-0,27 0,34 -0,06 |

1) alle Ladungszahlen der Zeilen mit der 1. (obersten) beginnend.
2) Korrelationen der 1. Spalte mit der Kommunalität beginnend, jeweils nach Ablesen von $r_{Rest}$ R/S drücken, nach Abarbeiten der 1. Spalte GSB 4, dann 2. Spalte (wieder mit der Kommunalität beginnend) etc.

**Programm 45** (Theorie S. 68 f., Formel 123, 124)
**Rotation von Faktoren**

1. Eingabe des Rotationswinkels

```
001  Lbl 1
     STO 0
     SIN
     STO 1
005  RCL 0
     COS
     STO 0
008  R/S
```

2. Eingabe der ursprünglichen Ladungszahlen

```
009  Lbl 2
010  STO 2
     ENT
     RCL 0
     ×
     R/S
```

3. Berechnung der rotierten Ladungszahlen

```
015  STO 3
     ENT
     RCL 1
     ×
     -
020  R/S
021  RCL 2
     ENT
     RCL 1
     ×
025  RCL 3
     ENT
     RCL 0
     ×
     +
030  R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$<br>$a_{1_{1,2\ldots n}}$ 1)<br>$a_{2_{1,2\ldots n}}$ 1) | GSB 1<br>GSB 2<br>R/S<br>R/S | $a'_{1_{1,2\ldots n}}$<br>$a'_{2_{1,2\ldots n}}$ | $\alpha$ = 26,288°<br>$a_1$ = 0,84<br>$a_2$ = -0,47 | $a'_1$ = 0,96<br>$a'_2$ = -0,05 |

1) Reihenfolge der Bearbeitung: $a_{1_1}$, $a_{2_1}$, dann $a'_{1_1}$ und $a'_{2_1}$ ablesen, $a_{1_2}$, $a_{2_2}$, $a'_{1_2}$ und $a'_{2_2}$ ablesen etc.

**Programm 46** (Theorie S. 71 f., Formel 127)
**1-faktorielle Varianzanalyse**

1. Daten-
eingabe

```
001  Lbl 1
     R/S
     STO+0
     STO+2
005  x²
     STO+1
     1
     STO+3
     GTO 1
010  Lbl 2
011  RCL 2
     x²
     ENT
     RCL 3
015  :
     STO+4
     RCL 3
     STO+5
     0
     STO 2
     STO 3
     GTO 1
```

2. Berechnung
der Quadrat-
summen

```
023  Lbl 3
     RCL 0
025  x²
     ENT
     RCL 5
     :
     STO 2
030  RCL 1
     -
032  CHS
     R/S
     STO 3
035  RCL 4
     ENT
     RCL 2
     -
     R/S
040  STO-3
     RCL 3
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| alle X einer Stichprobe nach jeder Stichprobe | GSB | 1 | | Faktorstufen | |
| | | | | I II III | |
| | R/S | | | 3 4 6 | |
| | | | | 2 3 4 | |
| | GSB | 2 | | 4 5 9 | $QS_{tot}$ = 70,67 |
| | GSB | 3 | $QS_{tot}$ | 8 6 10 | |
| | R/S | | $QS_{treat}$ | | $QS_{treat}$ = 22,17 |
| | R/S | | $QS_{Fehler}$ | 1. Stpr. 2. Stpr. 3. Stpr. | $QS_{Fehler}$ = 48,50 |

**Programm 47** (Theorie S. 75 ff., Formel 136, 137)
**2-faktorielle Varianzanalyse**

1. Daten-
eingabe I

```
001  Lbl 0
     R/S
     STO+1
     STO+8
005  x²
     STO+0
     1
008  STO+9
     GTO 0
010  Lbl 1
     RCL 1
     R/S
     x²
     STO+2
015  RCL 9
     STO 3
017  0
     STO 1
     STO 9
020  GTO 0
```

2. Daten-
eingabe II

```
021  Lbl 2
     R/S
     x²
024  STO+4
025  1
     STO+5
     GTO 2
```

3. Daten-
eingabe III

```
     Lbl 3
     R/S
030  x²
```

```
031  STO+6
     1
     STO+7
     GTO 3
```

4. Berechnung der Quadratsummen

```
035  Lbl 4
     RCL 8
     x²
     ENT
     RCL 5
040  :
     RCL 7
042  :
     RCL 3
     :
045  STO 8
     RCL 3
     STO:2
     STO:4
     STO:6
050  RCL 7
     STO:4
     RCL 5
     STO:6
     RCL 4
055  ENT
056  RCL 8
     -
     R/S
     RCL 6
060  ENT
     RCL 8
     -
     R/S
     RCL 2
065  ENT
     RCL 4
     -
     RCL 6
     -
070  RCL 8
     +
     R/S
     RCL 0
     ENT
075  RCL 2
     -
     R/S
     RCL 0
     ENT
080  RCL 8
     -
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| | GSB 0 | | Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.78 benützt werden. | |
| alle X einer Stichprobe (="Zelle") | | | | |
| | R/S | | | |
| nach jeder Zelle | GSB 1 | $\sum$ Zelle | | |
| nach Ablesen der $\sum$ Zelle | | | | |
| | R/S | | | |
| | GSB 2 | | | |
| $I,1;\ I,2;\ldots I,p$ | R/S | | | |
| | GSB 3 | | | |
| $II,1;\ II,2\ldots II,q$ | R/S | | | |
| | GSB 4 | $QS_I$ | | |
| | R/S | $QS_{II}$ | | |
| | R/S | $QS_{I \times II}$ | | |
| | R/S | $QS_{Fehler}$ | | |
| | R/S | $QS_{tot}$ | | |

**Programm 48** (Theorie S. 82 ff., Formel 145, 146)
**1-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen**

1. Programmvorbereitung

```
001  Lbl 0
     STO 0
     STO i
     R/S
005  STO 1
     GTO 1
```

2. Dateneingabe

```
007  Lbl 1
     R/S
     STO+2
010  x²
     STO+3
     DSZ
013  GTO 1
     RCL 2
015  STO+4
     x²
     STO+5
     0
     STO 2
020  RCL 0
021  STO i
     GTO 1
     Lbl 2
     R/S
025  x²
     STO+6
     GTO 2
```

3. Berechnung der Quadratsummen

```
028  Lbl 3
     RCL 4
030  x²
     ENT
     RCL 0
     :
     RCL 1
035  :
     STO 4
     RCL 6
038  ENT
     RCL 1
040  :
     STO 6
     RCL 5
     ENT
     RCL 0
045  :
     STO 5
     RCL 5
     ENT
     RCL 4
050  -
051  R/S
     RCL 3
     ENT
     RCL 5
055  -
     R/S
     RCL 6
     ENT
     RCL 4
060  -
     R/S
     RCL 3
     ENT
064  RCL 6
065  -
     RCL 5
     -
     RCL 4
     +
070  R/S
     RCL 3
     ENT
     RCL 4
     -
075  R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| p | GSB | 0 | | Als Testrechnung möge das Beispiel auf S. 83 benützt werden. | |
| q | R/S | | | | |
| alle X (zeilenweise) | | | | | |
| | R/S | | | | |
| | GSB | 2 | | | |
| I,1;I,2...I,p | R/S | | | | |
| | GSB | 3 | $QS_{zw}$ Vpn | | |
| | R/S | | $QS_{in}$ Vpn | | |
| | R/S | | $QS_{treat}$ | | |
| | R/S | | $QS_{res}$ | | |
| | R/S | | $QS_{tot}$ | | |
| | | | | | |

**Programm 49** (Theorie S. 85 ff., Formel 148, 149)
**2-faktorielle Varianzanalyse mit Meßwiederholungen**

```
1. Programm-
   vorbereitung
001  Lbl 0
     STO 0
     STO i
     R/S
005  STO 1
     R/S
     STO 2
     GTO 1

2. Daten-
   eingabe
     Lbl 1
010  R/S
     STO+3
     x²
     STO+4
     ⟨DSZ⟩
015  GTO 1
     RCL 3
     R/S
     STO+5
     0
020  STO 3
     RCL 0
     STO i
     GTO 1
     Lbl 2
025  R/S
     x²
     STO+6
     GTO 2
     Lbl 3
030  R/S
     x²
     STO+7
     GTO 3
     Lbl 4
035  R/S
     x²
     STO+8
     GTO 4
     Lbl 5
040  R/S
     x²
     STO+9
     GTO 5

3. Berechnung
   der Quadrat-
   summen
044  Lbl 6
045  RCL 5
     x²
     ENT
     STO 5
     RCL 0
050  STO:5
051  STO:7
     STO:9
     RCL 1
     STO:5
055  STO:7
     STO:6
     STO:8
     RCL 2
     STO:6
060  STO:5
     RCL 7
     ENT
     RCL 5
     -
065  R/S
     RCL 9
     ENT
     RCL 7
     -
070  R/S
     RCL 9
     ENT
     RCL 5
     -
075  R/S
     RCL 6
     ENT
     RCL 5
     -
080  R/S
     RCL 8
     ENT
     RCL 6
     -
085  RCL 7
     -
     RCL 5
     +
     R/S
090  RCL 4
     ENT
     RCL 8
     -
     RCL 9
095  -
     RCL 7
     +
     R/S
     RCL 4
100  ENT
     RCL 9
     -
     R/S
     RCL 4
105  ENT
     RCL 5
     -
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| p | GSB 0 | | Als Testrechnung möge das Beispiel auf S.87 benützt werden. | |
| q | R/S | | | |
| r | R/S | | | |
| alle X (zeilen-weise) | | | | |
| | R/S | Zeilensumme (nach jeder Zeile) | | |
| nach Ablesen jeder Zeilen-summe | | | | |
| | R/S | | | |
| | GSB 2 | | | |
| I,1; I,2;...I,p | R/S | | | |
| | GSB 3 | | | |
| III,1;III,2... | | | | |
| III,r | R/S | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | GSB | 4 | | |
| ΣVpI, 1/III, 1; | | | | |
| ΣVpI, 2/III, 1... | | | | |
| ΣVpI, p/III, r | R/S | | | |
| | GSB | 5 | | |
| ΣVp1/III, 1; | | | | |
| ΣVp2/III, 1... | | | | |
| ΣVPq/III, r | R/S | | | |
| | GSB | 6 | $QS_{III}$ | |
| | R/S | | $QS_{inStpr}$ | |
| | R/S | | $QS_{zw\ Vpn}$ | |
| | R/S | | $QS_{I}$ | |
| | R/S | | $QS_{IxIII}$ | |
| | R/S | | $QS_{IxVpn}$ | |
| | R/S | | $QS_{in\ Vpn}$ | |
| | R/S | | $QS_{tot}$ | |
| | | | | |

**Programm 50** (Theorie S. 74, Formel 133, 134)
**Bartlett-Test**

1. Datenеingabe

```
001  Lbl 1
     R/S
     STO+1
     x²
005  STO+2
     1
     STO+3
     GTO 1
     Lbl 2
010  RCL 1
     x²
     ENT
     RCL 3
     STO+9
015  :
016  CHS
     RCL 2
     +
     RCL 3
020  ENT
     1
     -
     :
     STO 4
025  ENT
     RCL 3
     x
     STO+5
     RCL 3
030  ENT
     1
     -
     STO 3
034  ENT
035  RCL 4
     LOG
     x
     STO+6
     RCL 3
040  1/x
     STO+7
     1
     STO+8
     0
045  STO 1
     STO 2
     STO 3
     GTO 1
```

2. Berechnung des Chi²

```
049  Lbl 3
050  RCL 9
     ENT
     RCL 8
     -
     1/x
055  CHS
     ENT
     RCL 7
     +
     STO 1
060  RCL 8
     ENT
     1
     -
     3
```

```
065  x
     1/x
     STOx1
     1
     STO+1
070  2
     .
     3
     0
074  3
075  STO:1
     RCL 5
     ENT
     RCL 9
     :
080  LOG
     STO 2
     RCL 9
083  ENT
     RCL 8
085  -
     STOx2
     RCL 6
     STO-2
     RCL 2
090  ENT
091  RCL 1
     :
     R/S
     RCL 8
095  ENT
     1
     -
     R/S
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| alle X einer Stichprobe nach jeder Stichprobe | GSB | 1 | | 1. Stichprobe: 99; 105; 86; 121 | |
| | | | | | |
| | R/S | | | | |
| | | | | 2. Stichprobe: 67; 134; 119 | |
| | GSB | 2 | | | |
| | GSB | 3 | $Chi^2$ | 3. Stichprobe: 98; 104; 107; 112; 77, | $Chi^2 = 3{,}38$ |
| | R/S | | df | | df = 2 |
| | | | | | |

**Programm 51** (Theorie S. 89 f., Formel 151)
**Rating**

```
1. Programm-
   vorbereitung
001  Lbl 0
     STO i
     STO E
     GTO 1
2. Eingabe
   der Schät-
   zungen
005  Lbl 1
     R/S
     STO D
     ENT
     RCL C
010  +
     STO C
     RCL D
013  x²
     ENT
015  RCL B
     +
     STO B
     DSZ
     GTO 1
020  GTO 2
3. Skalen-
   werte
021  Lbl 2
     2
     1
     STO i
025  RCL E
     STO :(i)
     ISZ
028  STO:(i)
     DSZ
030  DSZ
     RCL B
     ENT
     RCL C
     R/S
035  x²
     -
     STO+(i)
     DSZ
     RCL C
040  STO+(i)
     DSZ
     x²
     STO+(i)
     RCL E
045  STO i
046  0
     STO C
     STO B
     GTO 1
4. Urteiler-
   übereinstimmung
050  Lbl 3
     RCL E
     ENT
     1
     -
055  RCL A
     :
     1/x
     STO 0
     1
```

```
060  9          065  R/S        070  STO-1       075  ENT
     STO i           :              RCL 1            RCL 0
     RCL(i)          STO 1          CHS              -
     x²              DSZ            STO:0            R/S
     ENT             RCL(i)         1
```

| Eingaben | Tasten | | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|---|
| N | GSB | 0 | | N=3, K=4 | |
| Schätzwerte | | | | | |
| (zeilenweise) | R/S | | Skalen- | 2;3 ; 2 | 2,33 |
| | | | werte 1) | 2;3 ; 3 | 2,67 |
| nach Anzeige | | | | 1;2 ; 2 | 1,67 |
| jedes Skalen- | | | | 3;4 ; 2 | 3,00 |
| wertes | R/S | | | | |
| | GSB | 3 | | | |
| K | R/S | | Ü | | Ü = 0,31 |

1) Nach Eingabe jeweils einer Zeile erscheint der Skalenwert.

**Programm 52** (Theorie S. 91 ff.)
**Likert-Skala**

```
1. Programm-
   vorbereitung
001  Lbl 0
     STO i
     STO E
     2
005  STO 1
     GTO 1

2. Daten-
   eingabe
007  Lbl 1
     R/S
     STO+0
010  DSZ
     GTO 1
     1
     STO+1
     RCL 1
015  STO i
     RCL 0
     STO(i)
     1
     STO+2
020  0
     STO 0
022  RCL E
     STO i
     GTO 1

3. Berechnung
   der Skala
025  Lbl 2
     2
     4
     STO i
     GTO 3
030  Lbl 3
     RCL(i)
     STO+0
     RCL i
     ENT
035  3
     -
     x=0 ?
     GTO 4
     DSZ
040  GTO 3
     Lbl 4
     RCL 0
     STO:(i)
044  ISZ
045  RCL i
     ENT
     2
     4
     -
050  x=0 ?
     GTO 5
     GTO 4
     Lbl 5
     0
055  STO 0
     3
     STO i
     STO 1
     GTO 6
060  Lbl 6
     RCL(i)
     STO+0
     RCL i
     ENT
065  3
     -
     x=0 ?
068  GTO 7
     DSZ
070  GTO 6
     Lbl 7
     RCL 1
     STO i
     RCL(i)
075  ENT
     2
     :
     RCL 0
     -
080  CHS
     .
     5
     -
     R/S
085  1
     STO+1
     RCL 1
     STO i
     0
090  STO 0
     GTO 6
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| Zahl der Objekte [1] | GSB 0 | | 2 | |
| Meßwerte (zeilenweise) | R/S | | 14; 21; 35; 48; | |
| | GSB 2 | F[2] | | F: |
| nach jedem Skalenwert | R/S | | | -0,3542<br>0,1375 |

1) Die Zahl der Objekte darf maximal 20 betragen.
2) Es erscheinen die Flächen, deren z-Wert nach Tab. 1 die Skalenwerte sind.

**Programm 53** (Theorie S. 93)
**Guttmann-Skala**

```
1. Eingabe
   der Häufig-
   keiten
001  Lbl 0
       2
       STO i
       GTO 1
005  Lbl 1
       R/S
       STO+0
       STO(i)
       ISZ
010    GTO 1

2. Skalierung
011  Lbl 2
       RCL 0
       STO:(i)
014    DSZ
015    RCL i
       ENT
       1
       -
       x=0 ?
020    GTO 3
       GTO 2
       Lbl 3
       0
       STO 0
025    2
       STO i
       STO 1
       GTO 4
       LBl 4
030    RCL(i)
31     STO+0
       RCL i
       ENT
       2
035    -
       x=0 ?
       GTO 5
       DSZ
       GTO 4
040    Lbl 5
       RCL 1
       STO i
       RCL(i)
       ENT
045    2
       :
047    RCL 0
       -
       CHS
050    ENT
       1
       0
       0
       ×
055    R/S
       1
       STO+1
       RCL 1
       STO i
060    0
       STO 0
       GTO 4
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung Eingabedaten | Testrechnung Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| alle f[1] | GSB 0 | | f: 12; 18; 32 | |
| | R/S | | | Skalenwerte: |
| | GSB 2 | Skalenwerte | | 9,68 |
| nach jedem Skalenwert | R/S | | | 33,87<br>74,19 |

1) in aufsteigender Reihenfolge: die Zahl der f darf maximal 22 sein.

**Programm 54** (Theorie S. 96 ff., Formel 155, 156)
**Konsistenz mit Signifikanztest**

1. Programmvorbereitung

```
001 Lbl 1
    STO 0
    ENT
    2
005 :
    FRAC
    (x=0 ?)
    GTO 2
    RCL 0
010 x²
    ENT
    1
    -
    STO 1
015 GTO 3
    Lbl 2
    RCL 0
    x²
    ENT
020 4
    -
    STO 1
    GTO 3
```

2. Eingabe der Spaltensummen

```
024 Lbl 3
025 R/S
    x²
    STO+2
    STO+4
    GTO 3
```

3. Errechnung von K

```
030 Lbl 4
    RCL 0
    ENT
    2
    x
035 STO 3
    1
    -
    STOx3
    RCL 0
040 ENT
    1
    -
    STOx3
    1
045 2
    STOx2
    RCL 2
    STO-3
    RCL 1
050 STO:3
    RCL 0
    STO:3
    RCL 3
    R/S
```

4. Signifikanz-Test

```
055 RCL 0
    STO i
    1
    STO 5
059 [GSB 5]
060 STO 6
    RCL 0
    ENT
    3
    -
065 STO i
    1
    STO 5
    [GSB 5]
    STO:6
070 2
    4
    STO:6
    RCL 0
    ENT
075 1
    -
    STO 7
    RCL 0
    x
080 STO 8
    RCL 0
    ENT
    2
    x
085 1
    -
    STOx8
    1
    2
090 STO:8
    .
    5
093 STOx4
    STO+4
    RCL 4
    STO+6
    RCL 8
    STO-6
    RCL 0
100 ENT
    4
    -
    STO 5
    8
105 :
    STO:6
    RCL 0
    ENT
    2
110 -
    RCL 0
    x
    RCL 7
    x
115 RCL 5
    x²
    :
    R/S
    STO+6
120 RCL 6
    R/S
```

5. Unterprogramm "Fakultät"

```
122 Lbl 5
    RCL i
    STO x 5
125 (DSZ)
    GTO 5
    RCL 5
    RTN
```

| Eingaben | Tasten | Ergebnisse | Testrechnung: Eingabedaten | Testrechnung: Ergebnisse |
|---|---|---|---|---|
| n | GSB 1 | | n = 7 | |
| | GSB 3 | | Spaltensummen: | |
| alle Spaltensummen | | | 1;3;4;2;3; | |
| | R/S | | 5,3 | |
| | GSB 4 | K | | K = 0,64 |
| | R/S | df | | df = 23,33 |
| | R/S | $Chi^2$ | | $Chi^2$ = 24,00 |

# III. Teil: Tabellen

**Tabelle 1**

**Flächenstücke und Ordinaten der Gaußschen Normalverteilungs-Kurve**

| z | Fläche | Ordinate | z | Fläche | Ordinate | z | Fläche | Ordinate |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .00 | .0000 | .3989 | .40 | .1554 | .3683 | .80 | .2881 | .2897 |
| .01 | .0040 | .3989 | .41 | .1591 | .3668 | .81 | .2910 | .2874 |
| .02 | .0080 | .3989 | .42 | .1628 | .3653 | .82 | .2939 | .2850 |
| .03 | .0120 | .3988 | .43 | .1664 | .3637 | .83 | .2967 | .2827 |
| .04 | .0160 | .3986 | .44 | .1700 | .3621 | .84 | .2996 | .2803 |
| .05 | .0199 | .3984 | .45 | .1736 | .3605 | .85 | .3023 | .2780 |
| .06 | .0239 | .3982 | .46 | .1772 | .3589 | .86 | .3051 | .2756 |
| .07 | .0279 | .3980 | .47 | .1808 | .3572 | .87 | .3078 | .2732 |
| .08 | .0319 | .3977 | .48 | .1844 | .3555 | .88 | .3106 | .2709 |
| .09 | .0359 | .3973 | .49 | .1879 | .3538 | .89 | .3133 | .2685 |
| .10 | .0398 | .3970 | .50 | .1915 | .3521 | .90 | .3159 | .2661 |
| .11 | .0438 | .3965 | .51 | .1950 | .3503 | .91 | .3186 | .2637 |
| .12 | .0478 | .3961 | .52 | .1985 | .3485 | .92 | .3212 | .2613 |
| .13 | .0517 | .3956 | .53 | .2019 | .3467 | .93 | .3238 | .2589 |
| .14 | .0557 | .3951 | .54 | .2054 | .3448 | .94 | .3264 | .2565 |
| .15 | .0596 | .3945 | .55 | .2088 | .3429 | .95 | .3289 | .2541 |
| .16 | .0636 | .3939 | .56 | .2123 | .3410 | .96 | .3315 | .2516 |
| .17 | .0675 | .3932 | .57 | .2157 | .3391 | .97 | .3340 | .2492 |
| .18 | .0714 | .3925 | .58 | .2190 | .3372 | .98 | .3365 | .2468 |
| .19 | .0754 | .3918 | .59 | .2224 | .3352 | .99 | .3389 | .2444 |
| .20 | .0793 | .3910 | .60 | .2258 | .3332 | 1.00 | .3413 | .2420 |
| .21 | .0832 | .3902 | .61 | .2291 | .3312 | 1.01 | .3438 | .2396 |
| .22 | .0871 | .3894 | .62 | .2324 | .3292 | 1.02 | .3461 | .2371 |
| .23 | .0910 | .3885 | .63 | .2357 | .3271 | 1.03 | .3485 | .2347 |
| .24 | .0948 | .3876 | .64 | .2389 | .3251 | 1.04 | .3508 | .2323 |
| .25 | .0987 | .3867 | .65 | .2422 | .3230 | 1.05 | .3531 | .2299 |
| .26 | .1026 | .3857 | .66 | .2454 | .3209 | 1.06 | .3554 | .2275 |
| .27 | .1064 | .3847 | .67 | .2486 | .3187 | 1.07 | .3577 | .2251 |
| .28 | .1103 | .3836 | .68 | .2518 | .3166 | 1.08 | .3599 | .2227 |
| .29 | .1141 | .3825 | .69 | .2549 | .3144 | 1.09 | .3621 | .2203 |
| .30 | .1179 | .3814 | .70 | .2580 | .3123 | 1.10 | .3643 | .2179 |
| .31 | .1217 | .3802 | .71 | .2612 | .3101 | 1.11 | .3665 | .2155 |
| .32 | .1255 | .3790 | .72 | .2642 | .3079 | 1.12 | .3686 | .2131 |
| .33 | .1293 | .3778 | .73 | .2673 | .3056 | 1.13 | .3708 | .2107 |
| .34 | .1331 | .3765 | .74 | .2704 | .3034 | 1.14 | .3729 | .2083 |
| .35 | .1368 | .3752 | .75 | .2734 | .3011 | 1.15 | .3749 | .2059 |
| .36 | .1406 | .3739 | .76 | .2764 | .2989 | 1.16 | .3770 | .2036 |
| .37 | .1443 | .3725 | .77 | .2794 | .2966 | 1.17 | .3790 | .2012 |
| .38 | .1480 | .3712 | .78 | .2823 | .2943 | 1.18 | .3810 | .1989 |
| .39 | .1517 | .3697 | .79 | .2852 | .2920 | 1.19 | .3830 | .1965 |

| z | Fläche | Ordinate | z | Fläche | Ordinate | z | Fläche | Ordinate |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.20 | .3849 | .1942 | 1.60 | .4452 | .1109 | 2.00 | .4772 | .0540 |
| 1.21 | .3869 | .1919 | 1.61 | .4463 | .1092 | 2.01 | .4778 | .0529 |
| 1.22 | .3888 | .1895 | 1.62 | .4474 | .1074 | 2.02 | .4783 | .0519 |
| 1.23 | .3907 | .1872 | 1.63 | .4484 | .1057 | 2.03 | .4788 | .0508 |
| 1.24 | .3925 | .1849 | 1.64 | .4495 | .1040 | 2.04 | .4793 | .0498 |
| 1.25 | .3944 | .1826 | 1.65 | .4505 | .1023 | 2.05 | .4798 | .0488 |
| 1.26 | .3962 | .1804 | 1.66 | .4515 | .1006 | 2.06 | .4803 | .0478 |
| 1.27 | .3980 | .1781 | 1.67 | .4525 | .0989 | 2.07 | .4808 | .0468 |
| 1.28 | .3997 | .1758 | 1.68 | .4535 | .0973 | 2.08 | .4812 | .0459 |
| 1.29 | .4015 | .1736 | 1.69 | .4545 | .0957 | 2.09 | .4817 | .0449 |
| 1.30 | .4032 | .1714 | 1.70 | .4554 | .0940 | 2.10 | .4821 | .0440 |
| 1.31 | .4049 | .1691 | 1.71 | .4564 | .0925 | 2.11 | .4826 | .0431 |
| 1.32 | .4066 | .1669 | 1.72 | .4573 | .0909 | 2.12 | .4830 | .0422 |
| 1.33 | .4082 | .1647 | 1.73 | .4582 | .0893 | 2.13 | .4834 | .0413 |
| 1.34 | .4099 | .1626 | 1.74 | .4591 | .0878 | 2.14 | .4838 | .0404 |
| 1.35 | .4115 | .1604 | 1.75 | .4599 | .0863 | 2.15 | .4842 | .0396 |
| 1.36 | .4131 | .1582 | 1.76 | .4608 | .0848 | 2.16 | .4846 | .0387 |
| 1.37 | .4147 | .1561 | 1.77 | .4616 | .0833 | 2.17 | .4850 | .0379 |
| 1.38 | .4162 | .1539 | 1.78 | .4625 | .0818 | 2.18 | .4854 | .0371 |
| 1.39 | .4177 | .1518 | 1.79 | .4633 | .0804 | 2.19 | .4857 | .0363 |
| 1.40 | .4192 | .1497 | 1.80 | .4641 | .0790 | 2.20 | .4861 | .0355 |
| 1.41 | .4207 | .1476 | 1.81 | .4649 | .0775 | 2.21 | .4864 | .0347 |
| 1.42 | .4222 | .1456 | 1.82 | .4656 | .0761 | 2.22 | .4868 | .0339 |
| 1.43 | .4236 | .1435 | 1.83 | .4664 | .0748 | 2.23 | .4871 | .0332 |
| 1.44 | .4251 | .1415 | 1.84 | .4671 | .0734 | 2.24 | .4875 | .0325 |
| 1.45 | .4265 | .1394 | 1.85 | .4678 | .0721 | 2.25 | .4878 | .0317 |
| 1.46 | .4279 | .1374 | 1.86 | .4686 | .0707 | 2.26 | .4881 | .0310 |
| 1.47 | .4292 | .1354 | 1.87 | .4693 | .0694 | 2.27 | .4884 | .0303 |
| 1.48 | .4306 | .1334 | 1.88 | .4700 | .0681 | 2.28 | .4887 | .0297 |
| 1.49 | .4319 | .1315 | 1.89 | .4706 | .0669 | 2.29 | .4890 | .0290 |
| 1.50 | .4332 | .1295 | 1.90 | .4713 | .0656 | 2.30 | .4893 | .0283 |
| 1.51 | .4345 | .1276 | 1.91 | .4719 | .0644 | 2.31 | .4896 | .0277 |
| 1.52 | .4357 | .1257 | 1.92 | .4726 | .0632 | 2.32 | .4898 | .0270 |
| 1.53 | .4370 | .1238 | 1.93 | .4732 | .0620 | 2.33 | .4901 | .0264 |
| 1.54 | .4382 | .1219 | 1.94 | .4738 | .0608 | 2.34 | .4904 | .0258 |
| 1.55 | .4394 | .1200 | 1.95 | .4744 | .0596 | 2.35 | .4906 | .0252 |
| 1.56 | .4406 | .1182 | 1.96 | .4750 | .0584 | 2.36 | .4909 | .0246 |
| 1.57 | .4418 | .1163 | 1.97 | .4756 | .0573 | 2.37 | .4911 | .0241 |
| 1.58 | .4430 | .1145 | 1.98 | .4762 | .0562 | 2.38 | .4913 | .0235 |
| 1.59 | .4441 | .1127 | 1.99 | .4767 | .0551 | 2.39 | .4916 | .0229 |

| z | Fläche | Ordinate | z | Fläche | Ordinate | z | Fläche |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.40 | .4918 | .0224 | 2.80 | .4974 | .0079 | 3.40 | .49966 |
| 2.41 | .4920 | .0219 | 2.81 | .4975 | .0077 | 3.42 | .49969 |
| 2.42 | .4922 | .0213 | 2.82 | .4976 | .0075 | 3.44 | .49971 |
| 2.43 | .4925 | .0208 | 2.83 | .4977 | .0073 | 3.46 | .49973 |
| 2.44 | .4927 | .0203 | 2.84 | .4977 | .0071 | 3.48 | .49975 |
| 2.45 | .4929 | .0198 | 2.85 | .4978 | .0069 | 3.50 | .49977 |
| 2.46 | .4931 | .0194 | 2.86 | .4979 | .0067 | 3.55 | .49981 |
| 2.47 | .4932 | .0189 | 2.87 | .4980 | .0065 | 3.60 | .49984 |
| 2.48 | .4934 | .0184 | 2.88 | .4980 | .0063 | 3.65 | .49987 |
| 2.49 | .4936 | .0180 | 2.89 | .4981 | .0061 | 3.70 | .49989 |
| 2.50 | .4938 | .0175 | 2.90 | .4981 | .0060 | 3.75 | .49991 |
| 2.51 | .4940 | .0171 | 2.91 | .4982 | .0058 | 3.80 | .49993 |
| 2.52 | .4941 | .0167 | 2.92 | .4982 | .0056 | 3.85 | .49994 |
| 2.53 | .4943 | .0163 | 2.93 | .4983 | .0055 | 3.90 | .49995 |
| 2.54 | .4945 | .0158 | 2.94 | .4984 | .0053 | 3.95 | .49996 |
| 2.55 | .4946 | .0154 | 2.95 | .4984 | .0051 | 4.00 | .49997 |
| 2.56 | .4948 | .0151 | 2.96 | .4985 | .0050 | 4.10 | .499979 |
| 2.57 | .4949 | .0147 | 2.97 | .4985 | .0048 | 4.20 | .499987 |
| 2.58 | .4951 | .0143 | 2.98 | .4986 | .0047 | 4.30 | .499991 |
| 2.59 | .4952 | .0139 | 2.99 | .4986 | .0046 | 4.40 | .499995 |
| 2.60 | .4953 | .0136 | 3.00 | .4987 | .0044 | 4.50 | .499997 |
| 2.61 | .4955 | .0132 | 3.02 | .4987 | | 4.60 | .499998 |
| 2.62 | .4956 | .0129 | 3.04 | .4988 | | 4.70 | .499999 |
| 2.63 | .4957 | .0126 | 3.06 | .4989 | | 4.80 | .4999992 |
| 2.64 | .4959 | .0122 | 3.08 | .4990 | | 4.90 | .4999995 |
| 2.65 | .4960 | .0119 | 3.10 | .49903 | | 5.00 | .4999998 |
| 2.66 | .4961 | .0116 | 3.12 | .49910 | | 5.10 | .4999999 |
| 2.67 | .4962 | .0113 | 3.14 | .49916 | | 5.20 | .4999999 |
| 2.68 | .4963 | .0110 | 3.16 | .49921 | | 5.30 | .49999994 |
| 2.69 | .4964 | .0107 | 3.18 | .49926 | | 5.40 | .49999997 |
| 2.70 | .4965 | .0104 | 3.20 | .49931 | | 5.50 | .49999998 |
| 2.71 | .4966 | .0101 | 3.22 | .49936 | | 5.60 | .49999999 |
| 2.72 | .4967 | .0099 | 3.24 | .49940 | | 5.70 | .499999994 |
| 2.73 | .4968 | .0096 | 3.26 | .49944 | | 5.80 | .499999997 |
| 2.74 | .4969 | .0093 | 3.28 | .49948 | | 5.90 | .499999998 |
| 2.75 | .4970 | .0091 | 3.30 | .49952 | | 6.00 | .499999999 |
| 2.76 | .4971 | .0088 | 3.32 | .49955 | | 6.10 | .4999999995 |
| 2.77 | .4972 | .0086 | 3.34 | .49958 | | 6.20 | .4999999997 |
| 2.78 | .4973 | .0084 | 3.36 | .49961 | | 6.30 | .4999999999 |
| 2.79 | .4974 | .0081 | 3.38 | .49964 | | | |

**Tabelle 2**
**Kritische Werte der Chi-Quadrat-Verteilung**

| df | 25% | 5% | 1% | 0.1% |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.32330 | 3.84146 | 6.63490 | 10.828 |
| 2 | 2.77259 | 5.99147 | 9.21034 | 13.816 |
| 3 | 4.10835 | 7.81473 | 11.3449 | 16.266 |
| 4 | 5.38527 | 9.48773 | 13.2767 | 18.467 |
| 5 | 6.62568 | 11.0705 | 15.0863 | 20.515 |
| 6 | 7.84080 | 12.5916 | 16.8119 | 22.458 |
| 7 | 9.03715 | 14.0671 | 18.4753 | 24.322 |
| 8 | 10.2188 | 15.5073 | 20.0902 | 26.125 |
| 9 | 11.3887 | 16.9190 | 21.6660 | 27.877 |
| 10 | 12.5489 | 18.3070 | 23.2093 | 29.588 |
| 11 | 13.7007 | 19.6751 | 24.7250 | 31.264 |
| 12 | 14.8454 | 21.0261 | 26.2170 | 32.909 |
| 13 | 15.9839 | 22.3621 | 27.6883 | 34.528 |
| 14 | 17.1170 | 23.6848 | 29.1413 | 36.123 |
| 15 | 18.2451 | 24.9958 | 30.5779 | 37.697 |
| 16 | 19.3688 | 26.2962 | 31.9999 | 39.252 |
| 17 | 20.4887 | 27.5871 | 33.4087 | 40.790 |
| 18 | 21.6049 | 28.8693 | 34.8053 | 42.312 |
| 19 | 22.7178 | 30.1435 | 36.1908 | 43.820 |
| 20 | 23.8277 | 31.4104 | 37.5662 | 45.315 |
| 21 | 24.9348 | 32.6705 | 38.9321 | 46.797 |
| 22 | 26.0393 | 33.9244 | 40.2894 | 48.268 |
| 23 | 27.1413 | 35.1725 | 41.6384 | 49.728 |
| 24 | 28.2412 | 36.4151 | 42.9798 | 51.179 |
| 25 | 29.3389 | 37.6525 | 44.3141 | 52.620 |
| 26 | 30.4345 | 38.8852 | 45.6417 | 54.052 |
| 27 | 31.5284 | 40.1133 | 46.9630 | 55.476 |
| 28 | 32.6205 | 41.3372 | 48.2782 | 56.892 |
| 29 | 33.7109 | 42.5569 | 49.5879 | 58.302 |
| 30 | 34.7998 | 43.7729 | 50.8922 | 59.703 |
| 40 | 45.6160 | 55.7585 | 63.6907 | 73.402 |
| 50 | 56.3336 | 67.5048 | 76.1539 | 86.661 |
| 60 | 66.9814 | 79.0819 | 88.3794 | 99.607 |
| 70 | 77.5766 | 90.5312 | 100.425 | 112.317 |
| 80 | 88.1303 | 101.879 | 112.329 | 124.839 |
| 90 | 98.6499 | 113.145 | 124.116 | 137.208 |
| 100 | 109.141 | 124.342 | 135.807 | 149.449 |

**Tabelle 3**
**Kritische Werte der t-Verteilung**

| df | 5% | 1% | 0.1% | df | 5% | 1% | 0.1% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 12.706 | 63.657 | 636.619 | 18 | 2.101 | 2.878 | 3.922 |
| 2 | 4.303 | 9.925 | 31.598 | 19 | 2.093 | 2.861 | 3.883 |
| 3 | 3.182 | 5.841 | 12.941 | 20 | 2.086 | 2.845 | 3.850 |
| 4 | 2.776 | 4.604 | 8.610 | 21 | 2.080 | 2.831 | 3.819 |
| 5 | 2.571 | 4.032 | 6.859 | 22 | 2.074 | 2.819 | 3.792 |
| 6 | 2.447 | 3.707 | 5.959 | 23 | 2.069 | 2.807 | 3.767 |
| 7 | 2.365 | 3.499 | 5.405 | 24 | 2.064 | 2.797 | 3.745 |
| 8 | 2.306 | 3.355 | 5.041 | 25 | 2.060 | 2.787 | 3.725 |
| 9 | 2.262 | 3.250 | 4.781 | 26 | 2.056 | 2.779 | 3.707 |
| 10 | 2.228 | 3.169 | 4.587 | 27 | 2.052 | 2.771 | 3.690 |
| 11 | 2.201 | 3.106 | 4.437 | 28 | 2.048 | 2.763 | 3.674 |
| 12 | 2.179 | 3.055 | 4.318 | 29 | 2.045 | 2.756 | 3.659 |
| 13 | 2.160 | 3.012 | 4.221 | 30 | 2.042 | 2.750 | 3.646 |
| 14 | 2.145 | 2.977 | 4.140 | 40 | 2.021 | 2.704 | 3.551 |
| 15 | 2.131 | 2.947 | 4.073 | 60 | 2.000 | 2.660 | 3.460 |
| 16 | 2.120 | 2.921 | 4.015 | 120 | 1.980 | 2.617 | 3.373 |
| 17 | 2.110 | 2.898 | 3.965 | | | | |

**Tabelle 4**
**Kritische Werte der F-Verteilung**

| Nenner-df. | Fläche | Zähler-df 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.75 | 5.83 | 7.50 | 8.20 | 8.58 | 8.82 | 8.98 | 9.10 | 9.19 | 9.26 | 9.32 |
| | 0.90 | 39.9 | 49.5 | 53.6 | 55.8 | 57.2 | 58.2 | 58.9 | 59.4 | 59.9 | 60.2 |
| | 0.95 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 |
| 2 | 0.75 | 2.57 | 3.00 | 3.15 | 3.23 | 3.28 | 3.31 | 3.34 | 3.35 | 3.37 | 3.38 |
| | 0.90 | 8.53 | 9.00 | 9.16 | 9.24 | 9.29 | 9.33 | 9.35 | 9.37 | 9.38 | 9.39 |
| | 0.95 | 18.5 | 19.0 | 19.2 | 19.2 | 19.3 | 19.3 | 19.4 | 19.4 | 19.4 | 19.4 |
| | 0.99 | 98.5 | 99.0 | 99.2 | 99.2 | 99.3 | 99.3 | 99.4 | 99.4 | 99.4 | 99.4 |
| 3 | 0.75 | 2.02 | 2.28 | 2.36 | 2.39 | 2.41 | 2.42 | 2.43 | 2.44 | 2.44 | 2.44 |
| | 0.90 | 5.54 | 5.46 | 5.39 | 5.34 | 5.31 | 5.28 | 5.27 | 5.25 | 5.24 | 5.23 |
| | 0.95 | 10.1 | 9.55 | 9.28 | 9.12 | 9.10 | 8.94 | 8.89 | 8.85 | 8.81 | 8.79 |
| | 0.99 | 34.1 | 30.8 | 29.5 | 28.7 | 28.2 | 27.9 | 27.7 | 27.5 | 27.3 | 27.2 |

| Nenner-df | Fläche | Zähler-df 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0.75 | 1.81 | 2.00 | 2.05 | 2.06 | 2.07 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| | 0.90 | 4.54 | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 |
| | 0.95 | 7.71 | 6.94 | 6.59 | 6.39 | 6.26 | 6.16 | 6.09 | 6.04 | 6.00 | 5.96 |
| | 0.99 | 21.2 | 18.0 | 16.7 | 16.0 | 15.5 | 15.2 | 15.0 | 14.8 | 14.7 | 14.5 |
| 5 | 0.75 | 1.69 | 1.85 | 1.88 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 | 1.89 |
| | 0.90 | 4.06 | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 |
| | 0.95 | 6.61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5.05 | 4.95 | 4.88 | 4.82 | 4.77 | 4.74 |
| | 0.99 | 16.3 | 13.3 | 12.1 | 11.4 | 11.0 | 10.7 | 10.5 | 10.3 | 10.2 | 10.1 |
| 6 | 0.75 | 1.62 | 1.76 | 1.78 | 1.79 | 1.79 | 1.78 | 1.78 | 1.77 | 1.77 | 1.77 |
| | 0.90 | 3.78 | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 |
| | 0.95 | 5.99 | 5.14 | 4.76 | 4.53 | 4.39 | 4.28 | 4.21 | 4.15 | 4.10 | 4.06 |
| | 0.99 | 13.7 | 10.9 | 9.78 | 9.15 | 8.75 | 8.47 | 8.26 | 8.10 | 7.98 | 7.87 |
| 7 | 0.75 | 1.57 | 1.70 | 1.72 | 1.72 | 1.71 | 1.71 | 1.70 | 1.70 | 1.69 | 1.69 |
| | 0.90 | 3.59 | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.78 | 2.75 | 2.72 | 2.70 |
| | 0.95 | 5.59 | 4.74 | 4.35 | 4.12 | 3.97 | 3.87 | 3.79 | 3.73 | 3.68 | 3.64 |
| | 0.99 | 12.2 | 9.55 | 8.45 | 7.85 | 7.46 | 7.19 | 6.99 | 6.84 | 6.72 | 6.62 |
| 8 | 0.75 | 1.54 | 1.66 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.64 | 1.64 | 1.64 | 1.63 |
| | 0.90 | 3.46 | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 |
| | 0.95 | 5.32 | 4.46 | 4.07 | 3.84 | 3.69 | 3.58 | 3.50 | 3.44 | 3.39 | 3.35 |
| | 0.99 | 11.3 | 8.65 | 7.59 | 7.01 | 6.63 | 6.37 | 6.18 | 6.03 | 5.91 | 5.81 |
| 9 | 0.75 | 1.51 | 1.62 | 1.63 | 1.63 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 |
| | 0.90 | 3.36 | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 |
| | 0.95 | 5.12 | 4.26 | 3.86 | 3.63 | 3.48 | 3.37 | 3.29 | 3.23 | 3.18 | 3.14 |
| | 0.99 | 10.6 | 8.02 | 6.99 | 6.42 | 6.06 | 5.80 | 5.61 | 5.47 | 5.35 | 5.26 |
| 10 | 0.75 | 1.49 | 1.60 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.56 | 1.55 |
| | 0.90 | 3.28 | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 |
| | 0.95 | 4.96 | 4.10 | 3.71 | 3.48 | 3.33 | 3.22 | 3.14 | 3.07 | 3.02 | 2.98 |
| | 0.99 | 10.0 | 7.56 | 6.55 | 5.99 | 5.64 | 5.39 | 5.20 | 5.06 | 4.94 | 4.85 |
| 11 | 0.75 | 1.47 | 1.58 | 1.58 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.52 |
| | 0.90 | 3.23 | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 |
| | 0.95 | 4.84 | 3.98 | 3.59 | 3.36 | 3.20 | 3.09 | 3.01 | 2.95 | 2.90 | 2.85 |
| | 0.99 | 9.65 | 7.21 | 6.22 | 5.67 | 5.32 | 5.07 | 4.89 | 4.74 | 4.63 | 4.54 |
| 12 | 0.75 | 1.46 | 1.56 | 1.56 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 |
| | 0.90 | 3.18 | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.19 |
| | 0.95 | 4.75 | 3.89 | 3.49 | 3.26 | 3.11 | 3.00 | 2.91 | 2.85 | 2.80 | 2.75 |
| | 0.99 | 9.33 | 6.93 | 5.95 | 5.41 | 5.06 | 4.82 | 4.64 | 4.50 | 4.39 | 4.30 |
| 13 | 0.75 | 1.45 | 1.54 | 1.54 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 |
| | 0.90 | 3.14 | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.28 | 2.23 | 2.20 | 2.16 | 2.14 |
| | 0.95 | 4.67 | 3.81 | 3.41 | 3.18 | 3.03 | 2.92 | 2.83 | 2.77 | 2.71 | 2.67 |
| | 0.99 | 9.07 | 6.70 | 5.74 | 5.21 | 4.86 | 4.62 | 4.44 | 4.30 | 4.19 | 4.10 |

| Nenner-df | Fläche | Zähler-df 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | 0.75 | 1.44 | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.48 | 1.47 | 1.46 |
| | 0.90 | 3.10 | 2.73 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.10 |
| | 0.95 | 4.60 | 3.74 | 3.34 | 3.11 | 2.96 | 2.85 | 2.76 | 2.70 | 2.65 | 2.60 |
| | 0.99 | 8.86 | 6.51 | 5.56 | 5.04 | 4.69 | 4.46 | 4.28 | 4.14 | 4.03 | 3.94 |
| 15 | 0.75 | 1.43 | 1.52 | 1.52 | 1.51 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 |
| | 0.90 | 3.07 | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.09 | 2.06 |
| | 0.95 | 4.54 | 3.68 | 3.29 | 3.06 | 2.90 | 2.79 | 2.71 | 2.64 | 2.59 | 2.54 |
| | 0.99 | 8.68 | 6.36 | 5.42 | 4.89 | 4.56 | 4.32 | 4.14 | 4.00 | 3.89 | 3.80 |
| 16 | 0.75 | 1.42 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.48 | 1.48 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.45 |
| | 0.90 | 3.05 | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.06 | 2.03 |
| | 0.95 | 4.49 | 3.63 | 3.24 | 3.01 | 2.85 | 2.74 | 2.66 | 2.59 | 2.54 | 2.49 |
| | 0.99 | 8.53 | 6.23 | 5.29 | 4.77 | 4.44 | 4.20 | 4.03 | 3.89 | 3.78 | 3.69 |
| 17 | 0.75 | 1.42 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 |
| | 0.90 | 3.03 | 2.64 | 2.44 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.00 |
| | 0.95 | 4.45 | 3.59 | 3.20 | 2.96 | 2.81 | 2.70 | 2.61 | 2.55 | 2.40 | 2.45 |
| | 0.99 | 8.40 | 6.11 | 5.18 | 4.67 | 4.34 | 4.10 | 3.93 | 3.79 | 3.68 | 3.59 |
| 18 | 0.75 | 1.41 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.42 |
| | 0.90 | 3.01 | 2.62 | 2.42 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.98 |
| | 0.95 | 4.41 | 3.55 | 3.16 | 2.93 | 2.77 | 2.66 | 2.58 | 2.51 | 2.46 | 2.41 |
| | 0.99 | 8.29 | 6.01 | 5.09 | 4.58 | 4.25 | 4.01 | 3.84 | 3.71 | 3.60 | 3.51 |
| 19 | 0.75 | 1.41 | 1.49 | 1.49 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.42 | 1.41 | 1.41 |
| | 0.90 | 2.99 | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.96 |
| | 0.95 | 4.38 | 3.52 | 3.13 | 2.90 | 2.74 | 2.63 | 2.54 | 2.48 | 2.42 | 2.38 |
| | 0.99 | 8.18 | 5.93 | 5.01 | 4.50 | 4.17 | 3.94 | 3.77 | 3.63 | 3.52 | 3.43 |
| 20 | 0.75 | 1.40 | 1.49 | 1.48 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 |
| | 0.90 | 2.97 | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 |
| | 0.95 | 4.35 | 3.49 | 3.10 | 2.87 | 2.71 | 2.60 | 2.51 | 2.45 | 2.39 | 2.35 |
| | 0.99 | 8.10 | 5.85 | 4.94 | 4.43 | 4.10 | 3.97 | 3.70 | 3.56 | 3.46 | 3.37 |
| 22 | 0.75 | 1.40 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 |
| | 0.90 | 2.95 | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 |
| | 0.95 | 4.30 | 3.44 | 3.05 | 2.82 | 2.66 | 2.55 | 2.46 | 2.40 | 2.34 | 2.30 |
| | 0.99 | 7.95 | 5.72 | 4.82 | 4.31 | 3.99 | 3.76 | 3.59 | 3.45 | 3.35 | 3.26 |
| 24 | 0.75 | 1.39 | 1.47 | 1.46 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| | 0.90 | 2.93 | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.04 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.88 |
| | 0.95 | 4.26 | 3.40 | 3.01 | 2.78 | 2.62 | 2.51 | 2.42 | 2.36 | 2.30 | 2.25 |
| | 0.99 | 7.82 | 5.61 | 4.72 | 4.22 | 3.90 | 3.67 | 3.50 | 3.36 | 3.26 | 3.17 |
| 26 | 0.75 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.37 |
| | 0.90 | 2.91 | 2.25 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.86 |
| | 0.95 | 4.23 | 3.37 | 2.98 | 2.74 | 2.59 | 2.47 | 2.39 | 2.32 | 2.27 | 2.22 |
| | 0.99 | 7.72 | 5.53 | 4.64 | 4.14 | 3.82 | 3.59 | 3.42 | 3.29 | 3.18 | 3.09 |

| Nenner-df | Fläche | Zähler-df 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 0.75 | 1.38 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 |
| | 0.90 | 2.89 | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.87 | 1.84 |
| | 0.95 | 4.20 | 3.34 | 2.95 | 2.71 | 2.56 | 2.45 | 2.36 | 2.29 | 2.24 | 2.19 |
| | 0.99 | 7.64 | 5.45 | 4.57 | 4.07 | 3.75 | 3.53 | 3.36 | 3.23 | 3.12 | 3.03 |
| 30 | 0.75 | 1.38 | 1.45 | 1.44 | 1.42 | 1.41 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.35 |
| | 0.90 | 2.88 | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.05 | 1.98 | 1.93 | 1.88 | 1.85 | 1.82 |
| | 0.95 | 4.17 | 3.32 | 2.92 | 2.69 | 2.53 | 2.42 | 2.33 | 2.27 | 2.21 | 2.16 |
| | 0.99 | 7.56 | 5.39 | 4.51 | 4.02 | 3.70 | 3.47 | 3.30 | 3.17 | 3.07 | 2.98 |
| 40 | 0.75 | 1.36 | 1.44 | 1.42 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 |
| | 0.90 | 2.84 | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 2.00 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 |
| | 0.95 | 4.08 | 3.23 | 2.84 | 2.61 | 2.45 | 2.34 | 2.25 | 2.18 | 2.12 | 2.08 |
| | 0.99 | 7.31 | 5.18 | 4.31 | 3.83 | 3.51 | 3.29 | 3.12 | 2.99 | 2.89 | 2.80 |
| 60 | 0.75 | 1.35 | 1.42 | 1.41 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.30 |
| | 0.90 | 2.79 | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.95 | 1.87 | 1.82 | 1.77 | 1.74 | 1.71 |
| | 0.95 | 4.00 | 3.15 | 2.76 | 2.53 | 2.37 | 2.25 | 2.17 | 2.10 | 2.04 | 1.99 |
| | 0.99 | 7.08 | 4.98 | 4.13 | 3.65 | 3.34 | 3.12 | 2.95 | 2.82 | 2.72 | 2.63 |
| 120 | 0.75 | 1.34 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 |
| | 0.90 | 2.75 | 2.35 | 2.13 | 1.99 | 1.90 | 1.82 | 1.77 | 1.72 | 1.68 | 1.65 |
| | 0.95 | 3.92 | 3.07 | 2.68 | 2.45 | 2.29 | 2.17 | 2.09 | 2.02 | 1.96 | 1.91 |
| | 0.99 | 6.85 | 4.79 | 3.95 | 3.48 | 3.17 | 2.96 | 2.79 | 2.66 | 2.56 | 2.47 |
| 200 | 0.75 | 1.33 | 1.39 | 1.38 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 |
| | 0.90 | 2.73 | 2.33 | 2.11 | 1.97 | 1.88 | 1.80 | 1.75 | 1.70 | 1.66 | 1.63 |
| | 0.95 | 3.89 | 3.04 | 2.65 | 2.42 | 2.26 | 2.14 | 2.06 | 1.98 | 1.93 | 1.88 |
| | 0.99 | 6.76 | 4.71 | 3.88 | 3.41 | 3.11 | 2.89 | 2.73 | 2.60 | 2.50 | 2.41 |
| ∞ | 0.75 | 1.32 | 1.39 | 1.37 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.25 |
| | 0.90 | 2.71 | 2.30 | 2.08 | 1.94 | 1.85 | 1.77 | 1.72 | 1.67 | 1.63 | 1.60 |
| | 0.95 | 3.84 | 3.00 | 2.60 | 2.37 | 2.21 | 2.10 | 2.01 | 1.94 | 1.88 | 1.83 |
| | 0.99 | 6.63 | 4.61 | 3.78 | 3.32 | 3.02 | 2.80 | 2.64 | 2.51 | 2.41 | 2.32 |

| Nenner-df | Fläche | Zähler-df 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.75 | 9.49 | 9.58 | 9.67 | 9.71 | 9.74 | 9.78 | 9.82 | 9.84 | 9.85 |
| | 0.90 | 61.2 | 61.7 | 62.3 | 62.5 | 62.7 | 63.0 | 63.2 | 63.3 | 63.3 |
| | 0.95 | 246 | 248 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 254 | 254 |
| 2 | 0.75 | 3.41 | 3.43 | 3.44 | 3.45 | 3.45 | 3.47 | 3.48 | 3.48 | 3.48 |
| | 0.90 | 9.42 | 9.44 | 9.46 | 9.47 | 9.47 | 9.48 | 9.49 | 9.49 | 9.49 |
| | 0.95 | 19.4 | 19.4 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 | 19.5 |
| | 0.99 | 99.4 | 99.4 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 | 99.5 |

| Nenner-df | Fläche | Zähler-df 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.75 | 2.46 | 2.46 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 | 2.47 |
| | 0.90 | 5.20 | 5.18 | 5.17 | 5.16 | 5.15 | 5.14 | 5.14 | 5.14 | 5.13 |
| | 0.95 | 8.70 | 8.66 | 8.62 | 8.59 | 8.58 | 8.55 | 8.54 | 8.53 | 8.53 |
| | 0.99 | 26.9 | 26.7 | 26.5 | 26.4 | 26.4 | 26.2 | 26.2 | 26.1 | 26.1 |
| 4 | 0.75 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 | 2.08 |
| | 0.90 | 3.87 | 3.84 | 3.82 | 3.80 | 3.80 | 3.78 | 3.77 | 3.76 | 3.76 |
| | 0.95 | 5.86 | 5.80 | 5.75 | 5.72 | 5.70 | 5.66 | 5.65 | 5.64 | 5.63 |
| | 0.99 | 14.2 | 14.0 | 13.8 | 13.7 | 13.7 | 13.6 | 13.5 | 13.5 | 13.5 |
| 5 | 0.75 | 1.89 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.88 | 1.87 | 1.87 | 1.87 | 1.87 |
| | 0.90 | 3.24 | 3.21 | 3.17 | 3.16 | 3.15 | 3.13 | 3.12 | 3.11 | 3.10 |
| | 0.95 | 4.62 | 4.56 | 4.50 | 4.46 | 4.44 | 4.41 | 4.39 | 4.37 | 4.36 |
| | 0.99 | 9.72 | 9.55 | 9.38 | 9.29 | 9.24 | 9.13 | 9.08 | 9.04 | 9.02 |
| 6 | 0.75 | 1.76 | 1.76 | 1.75 | 1.75 | 1.75 | 1.74 | 1.74 | 1.74 | 1.74 |
| | 0.90 | 2.87 | 2.84 | 2.80 | 2.78 | 2.77 | 2.75 | 2.73 | 2.73 | 2.72 |
| | 0.95 | 3.94 | 3.87 | 3.81 | 3.77 | 3.75 | 3.71 | 3.69 | 3.68 | 3.67 |
| | 0.99 | 7.56 | 7.40 | 7.23 | 7.14 | 7.09 | 6.99 | 6.93 | 6.90 | 6.86 |
| 7 | 0.75 | 1.68 | 1.67 | 1.66 | 1.66 | 1.66 | 1.65 | 1.65 | 1.65 | 1.65 |
| | 0.90 | 2.63 | 2.59 | 2.56 | 2.54 | 2.52 | 2.50 | 2.48 | 2.48 | 2.47 |
| | 0.95 | 3.51 | 3.44 | 3.38 | 3.34 | 3.32 | 3.27 | 3.25 | 3.24 | 3.23 |
| | 0.99 | 6.31 | 6.16 | 5.99 | 5.91 | 5.86 | 5.75 | 5.70 | 5.67 | 5.65 |
| 8 | 0.75 | 1.62 | 1.61 | 1.60 | 1.59 | 1.59 | 1.58 | 1.58 | 1.58 | 1.58 |
| | 0.90 | 2.46 | 2.42 | 2.38 | 2.36 | 2.35 | 2.32 | 2.31 | 2.30 | 2.29 |
| | 0.95 | 3.22 | 3.15 | 3.08 | 3.04 | 3.02 | 2.97 | 2.95 | 2.94 | 2.93 |
| | 0.99 | 5.52 | 5.36 | 5.20 | 5.12 | 5.07 | 4.96 | 4.91 | 4.88 | 4.86 |
| 9 | 0.75 | 1.57 | 1.56 | 1.55 | 1.55 | 1.54 | 1.53 | 1.53 | 1.53 | 1.53 |
| | 0.90 | 2.34 | 2.30 | 2.25 | 2.23 | 2.22 | 2.19 | 2.17 | 2.17 | 2.16 |
| | 0.95 | 3.01 | 2.94 | 2.86 | 2.83 | 2.80 | 2.76 | 2.73 | 2.72 | 2.71 |
| | 0.99 | 4.96 | 4.81 | 4.65 | 4.57 | 4.52 | 4.42 | 4.36 | 4.33 | 4.31 |
| 10 | 0.75 | 1.53 | 1.52 | 1.51 | 1.51 | 1.50 | 1.49 | 1.49 | 1.48 | 1.48 |
| | 0.90 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.13 | 2.12 | 2.09 | 2.07 | 2.06 | 2.06 |
| | 0.95 | 2.85 | 2.77 | 2.70 | 2.66 | 2.64 | 2.59 | 2.56 | 2.55 | 2.54 |
| | 0.99 | 4.56 | 4.41 | 4.25 | 4.17 | 4.12 | 4.01 | 3.96 | 3.93 | 3.91 |
| 11 | 0.75 | 1.50 | 1.49 | 1.48 | 1.47 | 1.47 | 1.46 | 1.46 | 1.45 | 1.45 |
| | 0.90 | 2.17 | 2.12 | 2.08 | 2.05 | 2.04 | 2.00 | 1.99 | 1.98 | 1.97 |
| | 0.95 | 2.72 | 2.65 | 2.57 | 2.53 | 2.51 | 2.46 | 2.43 | 2.42 | 2.40 |
| | 0.99 | 4.25 | 4.10 | 3.94 | 3.86 | 3.81 | 3.71 | 3.66 | 3.62 | 3.60 |
| 12 | 0.75 | 1.48 | 1.47 | 1.45 | 1.45 | 1.44 | 1.43 | 1.43 | 1.42 | 1.42 |
| | 0.90 | 2.10 | 2.06 | 2.01 | 1.99 | 1.97 | 1.94 | 1.92 | 1.91 | 1.90 |
| | 0.95 | 2.62 | 2.54 | 2.47 | 2.43 | 2.40 | 2.35 | 2.32 | 2.31 | 2.30 |
| | 0.99 | 4.01 | 3.86 | 3.70 | 3.62 | 3.57 | 3.47 | 3.41 | 3.38 | 3.36 |

| Nenner-df | Fläche | Zähler-df 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 0.75 | 1.46 | 1.45 | 1.43 | 1.42 | 1.42 | 1.41 | 1.40 | 1.40 | 1.40 |
| | 0.90 | 2.05 | 2.01 | 1.96 | 1.93 | 1.92 | 1.88 | 1.86 | 1.85 | 1.85 |
| | 0.95 | 2.53 | 2.46 | 2.38 | 2.34 | 2.31 | 2.26 | 2.23 | 2.22 | 2.21 |
| | 0.99 | 3.82 | 3.66 | 3.51 | 3.43 | 3.38 | 3.27 | 3.22 | 3.19 | 3.17 |
| 14 | 0.75 | 1.44 | 1.43 | 1.41 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.38 |
| | 0.90 | 2.01 | 1.96 | 1.91 | 1.89 | 1.87 | 1.83 | 1.82 | 1.80 | 1.80 |
| | 0.95 | 2.46 | 2.39 | 2.31 | 2.27 | 2.24 | 2.19 | 2.16 | 2.14 | 2.13 |
| | 0.99 | 3.66 | 3.51 | 3.35 | 3.27 | 3.22 | 3.11 | 3.06 | 3.03 | 3.00 |
| 15 | 0.75 | 1.43 | 1.41 | 1.40 | 1.39 | 1.39 | 1.38 | 1.37 | 1.36 | 1.36 |
| | 0.90 | 1.97 | 1.92 | 1.87 | 1.85 | 1.83 | 1.79 | 1.77 | 1.76 | 1.76 |
| | 0.95 | 2.40 | 2.33 | 2.25 | 2.20 | 2.18 | 2.12 | 2.10 | 2.08 | 2.07 |
| | 0.99 | 3.52 | 3.37 | 3.21 | 3.13 | 3.08 | 2.98 | 2.92 | 2.89 | 2.87 |
| 16 | 0.75 | 1.41 | 1.40 | 1.38 | 1.37 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.34 |
| | 0.90 | 1.94 | 1.89 | 1.84 | 1.81 | 1.79 | 1.76 | 1.74 | 1.73 | 1.72 |
| | 0.95 | 2.35 | 2.28 | 2.19 | 2.15 | 2.12 | 2.07 | 2.04 | 2.02 | 2.01 |
| | 0.99 | 3.41 | 3.26 | 3.10 | 3.02 | 2.97 | 2.86 | 2.81 | 2.78 | 2.75 |
| 17 | 0.75 | 1.40 | 1.39 | 1.37 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.34 | 1.33 | 1.33 |
| | 0.90 | 1.91 | 1.86 | 1.81 | 1.78 | 1.76 | 1.73 | 1.71 | 1.69 | 1.69 |
| | 0.95 | 2.31 | 2.23 | 2.15 | 2.10 | 2.08 | 2.02 | 1.99 | 1.97 | 1.96 |
| | 0.99 | 3.31 | 3.16 | 3.00 | 2.92 | 2.87 | 2.76 | 2.71 | 2.68 | 2.65 |
| 18 | 0.75 | 1.39 | 1.38 | 1.36 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.32 | 1.32 |
| | 0.90 | 1.89 | 1.84 | 1.78 | 1.75 | 1.74 | 1.70 | 1.68 | 1.67 | 1.66 |
| | 0.95 | 2.27 | 2.19 | 2.11 | 2.06 | 2.04 | 1.98 | 1.95 | 1.93 | 1.92 |
| | 0.99 | 3.23 | 3.08 | 2.92 | 2.84 | 2.78 | 2.68 | 2.62 | 2.59 | 2.57 |
| 19 | 0.75 | 1.38 | 1.37 | 1.35 | 1.34 | 1.33 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.30 |
| | 0.90 | 1.86 | 1.81 | 1.76 | 1.73 | 1.71 | 1.67 | 1.65 | 1.64 | 1.63 |
| | 0.95 | 2.23 | 2.16 | 2.07 | 2.03 | 2.00 | 1.94 | 1.91 | 1.89 | 1.88 |
| | 0.99 | 3.15 | 3.00 | 2.84 | 2.76 | 2.71 | 2.60 | 2.55 | 2.51 | 2.49 |
| 20 | 0.75 | 1.37 | 1.36 | 1.34 | 1.33 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.30 | 1.29 |
| | 0.90 | 1.84 | 1.79 | 1.74 | 1.71 | 1.69 | 1.65 | 1.63 | 1.62 | 1.61 |
| | 0.95 | 2.20 | 2.12 | 2.04 | 1.99 | 1.97 | 1.91 | 1.88 | 1.86 | 1.84 |
| | 0.99 | 3.09 | 2.94 | 2.78 | 2.69 | 2.64 | 2.54 | 2.48 | 2.44 | 2.42 |
| 22 | 0.75 | 1.36 | 1.34 | 1.32 | 1.31 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.29 | 1.28 |
| | 0.90 | 1.81 | 1.76 | 1.70 | 1.67 | 1.65 | 1.61 | 1.59 | 1.58 | 1.57 |
| | 0.95 | 2.15 | 2.07 | 1.98 | 1.94 | 1.91 | 1.85 | 1.82 | 1.80 | 1.78 |
| | 0.99 | 2.98 | 2.83 | 2.67 | 2.58 | 2.53 | 2.42 | 2.36 | 2.33 | 2.31 |
| 24 | 0.75 | 1.35 | 1.33 | 1.31 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.27 | 1.26 |
| | 0.90 | 1.78 | 1.73 | 1.67 | 1.64 | 1.62 | 1.58 | 1.56 | 1.54 | 1.53 |
| | 0.95 | 2.11 | 2.03 | 1.94 | 1.89 | 1.86 | 1.80 | 1.77 | 1.75 | 1.73 |
| | 0.99 | 2.89 | 2.74 | 2.58 | 2.49 | 2.44 | 2.33 | 2.27 | 2.24 | 2.21 |

| Nenner df | Fläche | Zähler-df 15 | 20 | 30 | 40 | 50 | 100 | 200 | 500 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 0.75 | 1.34 | 1.32 | 1.30 | 1.29 | 1.28 | 1.26 | 1.26 | 1.25 | 1.25 |
| | 0.90 | 1.76 | 1.71 | 1.65 | 1.61 | 1.59 | 1.55 | 1.53 | 1.51 | 1.50 |
| | 0.95 | 2.07 | 1.99 | 1.90 | 1.85 | 1.82 | 1.76 | 1.73 | 1.71 | 1.69 |
| | 0.99 | 2.81 | 2.66 | 2.50 | 2.42 | 2.36 | 2.25 | 2.19 | 2.16 | 2.13 |
| 28 | 0.75 | 1.33 | 1.31 | 1.29 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.24 | 1.24 |
| | 0.90 | 1.74 | 1.69 | 1.63 | 1.59 | 1.57 | 1.53 | 1.50 | 1.49 | 1.48 |
| | 0.95 | 2.04 | 1.96 | 1.87 | 1.82 | 1.79 | 1.73 | 1.69 | 1.67 | 1.65 |
| | 0.99 | 2.75 | 2.60 | 2.44 | 2.35 | 2.30 | 2.19 | 2.13 | 2.09 | 2.06 |
| 30 | 0.75 | 1.32 | 1.30 | 1.28 | 1.27 | 1.26 | 1.25 | 1.24 | 1.23 | 1.23 |
| | 0.90 | 1.72 | 1.67 | 1.61 | 1.57 | 1.55 | 1.51 | 1.48 | 1.47 | 1.46 |
| | 0.95 | 2.01 | 1.93 | 1.84 | 1.79 | 1.76 | 1.70 | 1.66 | 1.64 | 1.62 |
| | 0.99 | 2.70 | 2.55 | 2.39 | 2.30 | 2.25 | 2.13 | 2.07 | 2.03 | 2.01 |
| 40 | 0.75 | 1.30 | 1.28 | 1.25 | 1.24 | 1.23 | 1.21 | 1.20 | 1.19 | 1.19 |
| | 0.90 | 1.66 | 1.61 | 1.54 | 1.51 | 1.48 | 1.43 | 1.41 | 1.39 | 1.38 |
| | 0.95 | 1.92 | 1.84 | 1.74 | 1.69 | 1.66 | 1.59 | 1.55 | 1.53 | 1.51 |
| | 0.99 | 2.52 | 2.37 | 2.20 | 2.11 | 2.06 | 1.94 | 1.87 | 1.83 | 1.80 |
| 60 | 0.75 | 1.27 | 1.25 | 1.22 | 1.21 | 1.20 | 1.17 | 1.16 | 1.15 | 1.15 |
| | 0.90 | 1.60 | 1.54 | 1.48 | 1.44 | 1.41 | 1.36 | 1.33 | 1.31 | 1.29 |
| | 0.95 | 1.84 | 1.75 | 1.65 | 1.59 | 1.56 | 1.48 | 1.44 | 1.41 | 1.39 |
| | 0.99 | 2.35 | 2.20 | 2.03 | 1.94 | 1.88 | 1.75 | 1.68 | 1.63 | 1.60 |
| 120 | 0.75 | 1.24 | 1.22 | 1.19 | 1.18 | 1.17 | 1.14 | 1.12 | 1.11 | 1.10 |
| | 0.90 | 1.55 | 1.48 | 1.41 | 1.37 | 1.34 | 1.27 | 1.24 | 1.21 | 1.19 |
| | 0.95 | 1.75 | 1.66 | 1.55 | 1.50 | 1.46 | 1.37 | 1.32 | 1.28 | 1.25 |
| | 0.99 | 2.19 | 2.03 | 1.86 | 1.76 | 1.70 | 1.56 | 1.48 | 1.42 | 1.38 |
| 200 | 0.75 | 1.23 | 1.21 | 1.18 | 1.16 | 1.14 | 1.11 | 1.09 | 1.08 | 1.06 |
| | 0.90 | 1.52 | 1.46 | 1.38 | 1.34 | 1.31 | 1.24 | 1.20 | 1.17 | 1.14 |
| | 0.95 | 1.72 | 1.62 | 1.52 | 1.46 | 1.41 | 1.32 | 1.26 | 1.22 | 1.19 |
| | 0.99 | 2.13 | 1.97 | 1.79 | 1.69 | 1.63 | 1.48 | 1.39 | 1.33 | 1.28 |
| | 0.75 | 1.22 | 1.19 | 1.16 | 1.14 | 1.13 | 1.09 | 1.07 | 1.04 | 1.00 |
| | 0.90 | 1.49 | 1.42 | 1.34 | 1.30 | 1.26 | 1.18 | 1.13 | 1.08 | 1.00 |
| | 0.95 | 1.67 | 1.57 | 1.46 | 1.39 | 1.35 | 1.24 | 1.17 | 1.11 | 1.00 |
| | 0.99 | 2.04 | 1.88 | 1.70 | 1.59 | 1.52 | 1.36 | 1.25 | 1.15 | 1.00 |

**Tabelle 5**
**Kritische Werte für den U-Test**

Kritische Werte von U für den Test von Mann u. Whitney
für den einseitigen Test bei a = 0.01, für den zweiseitigen Test bei a = 0.02

| | $n_2$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 |
| 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 |
| 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 9 | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 38 | 40 |
| 10 | 16 | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 38 | 41 | 44 | 47 |
| 11 | 18 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 |
| 12 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 56 | 60 |
| 13 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 | 67 |
| 14 | 26 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | 51 | 56 | 60 | 65 | 69 | 73 |
| 15 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 66 | 70 | 75 | 80 |
| 16 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 | 82 | 87 |
| 17 | 33 | 38 | 44 | 49 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | 82 | 88 | 93 |
| 18 | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 | 100 |
| 19 | 38 | 44 | 50 | 56 | 63 | 69 | 75 | 82 | 88 | 94 | 101 | 107 |
| 20 | 40 | 47 | 53 | 60 | 67 | 73 | 80 | 87 | 93 | 100 | 107 | 114 |

für den einseitigen Test bei a = 0.025, für den zweiseitigen Test bei a = 0.050

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 |
| 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| 7 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 8 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 38 | 41 |
| 9 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| 10 | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 52 | 55 |
| 11 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 12 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 13 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 59 | 63 | 67 | 72 | 76 |
| 14 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 | 64 | 67 | 74 | 78 | 83 |
| 15 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| 16 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 92 | 98 |
| 17 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 77 | 75 | 81 | 87 | 93 | 99 | 105 |
| 18 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 |
| 19 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 8 5 | 92 | 99 | 106 | 113 | 119 |
| 20 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 119 | 127 |

für den einseitigen Test bei a = 0.05, für den zweiseitigen Test bei a = 0.10

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | 11 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 5 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| 6 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 8 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | 47 |
| 9 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| 10 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 11 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 12 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| 13 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| 14 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| 15 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| 16 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 17 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| 18 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |

**Tabelle 6**
**Kritische Werte für den H-Test**

| Gruppen-Größen $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | p |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2.7000 | .500 |
| 2 | 2 | 1 | 3.6000 | .200 |
| 2 | 2 | 2 | 4.5714 | .067 |
| | | | 3.7143 | .200 |
| 3 | 1 | 1 | 3.2000 | .300 |
| 3 | 2 | 1 | 4.2857 | .100 |
| | | | 3.8571 | .133 |
| 3 | 2 | 2 | 5.3572 | .029 |
| | | | 4.7143 | .048 |
| | | | 4.5000 | .067 |
| | | | 4.4643 | .105 |
| 3 | 3 | 1 | 5.1429 | .043 |
| | | | 4.5714 | .100 |
| | | | 4.0000 | .129 |
| 3 | 3 | 2 | 6.2500 | .011 |
| | | | 5.3611 | .032 |
| | | | 5.1389 | .061 |
| | | | 4.5556 | .100 |
| | | | 4.2500 | .121 |
| 3 | 3 | 3 | 7.2000 | .004 |
| | | | 6.4889 | .011 |
| | | | 5.6889 | .029 |
| | | | 5.6000 | .050 |
| | | | 5.0667 | .086 |
| | | | 4.6222 | .100 |
| 4 | 1 | 1 | 3.5714 | .200 |
| 4 | 2 | 1 | 4.8214 | .057 |
| | | | 4.5000 | .076 |
| | | | 4.0179 | .114 |
| 4 | 2 | 2 | 6.0000 | .014 |
| | | | 5.3333 | .033 |
| | | | 5.1250 | .052 |
| | | | 4.4583 | .100 |
| | | | 4.1667 | .105 |
| 4 | 3 | 1 | 5.8333 | .021 |
| | | | 5.2083 | .050 |
| | | | 5.0000 | .057 |
| | | | 4.0556 | .093 |
| | | | 3.8889 | .129 |
| 4 | 3 | 2 | 6.4444 | .008 |
| | | | 6.3000 | .011 |
| | | | 5.4444 | .046 |
| | | | 5.4000 | .051 |
| | | | 4.5111 | .098 |
| | | | 4.4444 | .102 |
| 4 | 3 | 3 | 6.7455 | .010 |
| | | | 6.7091 | .013 |
| | | | 5.7909 | .046 |
| | | | 5.7273 | .050 |
| | | | 4.7091 | .092 |
| | | | 4.7000 | .101 |
| 4 | 4 | 1 | 6.6667 | .010 |
| | | | 6.1667 | .022 |
| | | | 4.9667 | .048 |
| | | | 4.8667 | .054 |
| | | | 4.1667 | .082 |
| | | | 4.0667 | .102 |
| 4 | 4 | 2 | 7.0364 | .006 |
| | | | 6.8727 | .011 |
| | | | 5.4545 | .046 |
| | | | 5.2364 | .052 |
| | | | 4.5545 | .098 |
| | | | 4.4455 | .103 |
| 4 | 4 | 3 | 7.1439 | .010 |
| | | | 7.1364 | .011 |
| | | | 5.5985 | .049 |
| | | | 5.5758 | .051 |
| | | | 4.5455 | .099 |
| | | | 4.4773 | .102 |
| 4 | 4 | 4 | 7.6538 | .008 |
| | | | 7.5385 | .011 |

| Gruppen-Größen $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | p |
|---|---|---|---|---|
| | | | 5.6923 | .049 |
| | | | 5.6538 | .054 |
| | | | 4.6539 | .097 |
| | | | 4.5001 | .104 |
| 5 | 1 | 1 | 3.8571 | .143 |
| 5 | 2 | 1 | 5.2500 | .036 |
| | | | 5.0000 | .048 |
| | | | 4.4500 | .071 |
| | | | 4.2000 | .095 |
| | | | 4.0500 | .119 |
| 5 | 2 | 2 | 6.5333 | .008 |
| | | | 6.1333 | .013 |
| | | | 5.1600 | .034 |
| | | | 5.0400 | .056 |
| | | | 4.3733 | .090 |
| | | | 4.2933 | .122 |
| 5 | 3 | 1 | 6.4000 | .012 |
| | | | 4.9600 | .048 |
| | | | 4.8711 | .052 |
| | | | 4.0178 | .095 |
| | | | 3.8400 | .123 |
| 5 | 3 | 2 | 6.9091 | .009 |
| | | | 6.8218 | .010 |
| | | | 5.2509 | .049 |
| | | | 5.1055 | .052 |
| | | | 4.6509 | .091 |
| | | | 4.4945 | .101 |
| 5 | 3 | 3 | 7.0788 | .009 |
| | | | 6.9818 | .011 |
| | | | 5.6485 | .049 |
| | | | 5.5152 | .051 |
| | | | 4.5333 | .097 |
| | | | 4.4121 | .109 |
| 5 | 4 | 1 | 6.9545 | .008 |
| | | | 6.8400 | .011 |
| | | | 4.9855 | .044 |
| | | | 4.8600 | .056 |
| | | | 3.9873 | .098 |
| | | | 3.9600 | .102 |

| Gruppen-Größen $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | p |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 2 | 7.2045 | .009 |
| | | | 7.1182 | .010 |
| | | | 5.2727 | .049 |
| | | | 5.2682 | .050 |
| | | | 4.5409 | .098 |
| | | | 4.5182 | .101 |
| 5 | 4 | 3 | 7.4449 | .010 |
| | | | 7.3949 | .011 |
| | | | 5.6564 | .049 |
| | | | 5.6308 | .050 |
| | | | 4.5487 | .099 |
| | | | 4.5231 | .103 |
| 5 | 4 | 4 | 7.7604 | .009 |
| | | | 7.7440 | .011 |
| | | | 5.6571 | .049 |
| | | | 5.6176 | .050 |
| | | | 4.6187 | .100 |
| | | | 4.5527 | .102 |
| 5 | 5 | 1 | 7.3091 | .009 |
| | | | 6.8364 | .011 |
| | | | 5.1273 | .046 |
| | | | 4.9091 | .053 |
| | | | 4.1091 | .086 |
| | | | 4.0364 | .105 |
| 5 | 5 | 2 | 7.3385 | .010 |
| | | | 7.2692 | .010 |
| | | | 5.3385 | .047 |
| | | | 5.2462 | .051 |
| | | | 4.6231 | .097 |
| | | | 4.5077 | .100 |
| 5 | 5 | 3 | 7.5780 | .010 |
| | | | 7.5429 | .010 |
| | | | 5.7055 | .046 |
| | | | 5.6264 | .051 |
| | | | 4.5451 | .100 |
| | | | 4.5363 | .102 |
| 5 | 5 | 4 | 7.8229 | .010 |
| | | | 7.7914 | .010 |
| | | | 5.6657 | .049 |

| Gruppen-Größen $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | p |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 4 | 5.6429 | .050 |
| | | | 4.5229 | .099 |
| | | | 4.5200 | .101 |

| Gruppen-Größen $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | H | p |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 5 | 8.000 | .009 |
| | | | 7.9800 | .010 |
| | | | 5.7800 | .049 |
| | | | 5.6600 | .051 |
| | | | 4.5600 | .100 |
| | | | 4.5000 | .102 |

**Tabelle 7**
**Kritische Werte für Chi² Friedman**

Zufallswahrscheinlichkeiten von bestimmten $Chi^2$-Werten im Friedman-Test für c = 3 Gruppen

N = 2

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| 0 | 1.000 |
| 1 | .833 |
| 3 | .500 |
| 4 | .167 |

N = 3

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .000 | 1.000 |
| .667 | .944 |
| 2.000 | .528 |
| 2.667 | .361 |
| 4.667 | .194 |
| 6.000 | .028 |

N = 4

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .0 | 1.000 |
| .5 | .931 |
| 1.5 | .653 |
| 2.0 | .431 |
| 3.5 | .273 |
| 4.5 | .125 |
| 6.0 | .069 |
| 6.5 | .042 |
| 8.0 | .0046 |

N = 5

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .0 | 1.000 |
| .4 | .954 |
| 1.2 | .691 |
| 1.6 | .522 |
| 2.8 | .367 |
| 3.6 | .182 |
| 4.8 | .124 |
| 5.2 | .093 |
| 6.4 | .039 |
| 7.6 | .024 |
| 8.4 | .0085 |
| 10.0 | .00077 |

N = 6

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .00 | 1.000 |
| .33 | .956 |
| 1.00 | .740 |
| 1.33 | .570 |
| 2.33 | .430 |
| 3.00 | .252 |
| 4.00 | .184 |
| 4.33 | .142 |
| 5.33 | .072 |
| 6.33 | .052 |
| 7.00 | .029 |
| 8.33 | .012 |
| 9.00 | .0081 |
| 9.33 | .0055 |
| 10.33 | .0017 |
| 12.00 | .00013 |

N = 7

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .000 | 1.000 |
| .286 | .964 |
| .857 | .768 |
| 1.143 | .620 |
| 2.000 | .486 |
| 2.571 | .305 |
| 3.429 | .237 |
| 3.714 | .192 |
| 4.571 | .112 |
| 5.429 | .085 |
| 6.000 | .052 |
| 7.143 | .027 |
| 7.714 | .021 |
| 8.000 | .016 |
| 8.857 | .0084 |
| 10.286 | .0036 |
| 10.571 | .0027 |
| 11.143 | .0012 |
| 12.286 | .00032 |
| 14.000 | .000021 |

N = 8

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .00 | 1.000 |
| .25 | .967 |
| .75 | .794 |
| 1.00 | .654 |
| 1.75 | .531 |
| 2.25 | .355 |
| 3.00 | .285 |
| 3.25 | .236 |

N = 8

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| 4.00 | .149 |
| 4.75 | .120 |
| 5.25 | .079 |
| 6.25 | .047 |
| 6.75 | .038 |
| 7.00 | .030 |
| 7.75 | .018 |
| 9.00 | .0099 |
| 9.25 | .0080 |
| 9.75 | .0048 |
| 10.75 | .0024 |
| 12.00 | .0011 |
| 12.25 | .00086 |
| 13.00 | .00026 |
| 14.25 | .000061 |
| 16.00 | .0000036 |

N = 9

| $Chi^2$ | p |
|---|---|
| .000 | 1.000 |
| .222 | .971 |
| .667 | .814 |
| .889 | .865 |
| 1.556 | .569 |
| 2.000 | .398 |
| 2.667 | .328 |
| 2.889 | .278 |
| 3.556 | .187 |
| 4.222 | .154 |
| 4.667 | .107 |
| 5.556 | .069 |

| N = 9 | | N = 9 | | N = 9 | | N = 9 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Chi^2$ | p | $Chi^2$ | p | $Chi^2$ | p | $Chi^2$ | p |
| 6.000 | .057 | 8.222 | .016 | 10.889 | .0029 | 14.000 | .00020 |
| 6.222 | .048 | 8.667 | .010 | 11.556 | .0013 | 14.222 | .000097 |
| 6.889 | .031 | 9.556 | .0060 | 12.667 | .00066 | 14.889 | .000054 |
| 8.000 | .019 | 10.667 | .0035 | 13.556 | .00035 | 16.222 | .000011 |
| | | | | | | 18.000 | .0000006 |

für c = 4 Gruppen

| N = 2 | | N = 3 | | N = 4 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Chi^2$ | p | $Chi^2$ | p | $Chi^2$ | p | $Chi^2$ | p |
| .0 | 1.000 | .2 | 1.000 | .0 | 1.000 | 5.7 | .141 |
| .6 | .958 | .6 | .958 | .3 | .992 | 6.0 | .105 |
| 1.2 | .834 | 1.0 | .910 | .6 | .928 | 6.3 | .094 |
| 1.8 | .792 | 1.8 | .727 | .9 | .900 | 6.6 | .077 |
| 2.4 | .625 | 2.2 | .608 | 1.2 | .800 | 6.9 | .068 |
| 3.0 | .542 | 2.6 | .524 | 1.5 | .754 | 7.2 | .054 |
| 3.6 | .458 | 3.4 | .446 | 1.8 | .677 | 7.5 | .052 |
| 4.2 | .375 | 3.8 | .342 | 2.1 | .649 | 7.8 | .036 |
| 4.8 | .208 | 4.2 | .300 | 2.4 | .524 | 8.1 | .033 |
| 5.4 | .167 | 5.0 | .207 | 2.7 | .508 | 8.4 | .019 |
| 6.0 | .042 | 5.4 | .175 | 3.0 | .432 | 6.7 | .014 |
| | | 5.8 | .148 | 3.3 | .389 | 9.3 | .012 |
| | | 6.6 | .075 | 3.6 | .355 | 9.6 | .0069 |
| | | 7.0 | .054 | 3.9 | .324 | 9.9 | .0062 |
| | | 7.4 | .033 | 4.5 | .242 | 10.2 | .0027 |
| | | 8.2 | .017 | 4.8 | .200 | 10.8 | .0016 |
| | | 9.0 | .0017 | 5.1 | .190 | 11.1 | .00094 |
| | | | | 5.4 | .158 | 12.0 | .000072 |

**Tabelle 8**
**Kritische Werte für den Wilcoxen-Test**

| | Irrtumswahrscheinlichkeit für einseitige Fragestellung | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.025 | 0.01 | 0.005 | | 0.025 | 0.01 | 0.005 |
| | Irrtumswahrscheinlichkeit für zweiseitige Fragestellung | | | | | | |
| n | 0.05 | 0.02 | 0.01 | n | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 6 | 0 | | | 16 | 30 | 24 | 20 |
| 7 | 2 | 0 | | 17 | 35 | 28 | 23 |
| 8 | 4 | 2 | 0 | 18 | 40 | 33 | 28 |
| 9 | 6 | 3 | 2 | 19 | 46 | 38 | 32 |
| 10 | 8 | 5 | 3 | 20 | 52 | 43 | 38 |
| 11 | 11 | 7 | 5 | 21 | 59 | 49 | 43 |
| 12 | 14 | 10 | 7 | 22 | 66 | 56 | 49 |
| 13 | 17 | 13 | 10 | 23 | 73 | 62 | 55 |
| 14 | 21 | 16 | 13 | 24 | 81 | 69 | 61 |
| 15 | 25 | 20 | 16 | 25 | 89 | 77 | 68 |

**Tabelle 9**
**Kritische Werte für einen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten**

| Freiheits-Grade | 5 % | 1 % | Freiheits-Grade | 5 % | 1 % | Freiheits-Grade | 5 % | 1 % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .997 | 1.000 | 21 | .413 | .526 | 70 | .232 | .302 |
| 2 | .950 | .990 | 22 | .404 | .515 | 80 | .217 | .283 |
| 3 | .878 | .959 | 23 | .396 | .505 | 90 | .205 | .267 |
| 4 | .811 | .917 | 24 | .388 | .496 | 100 | .195 | .254 |
| 5 | .754 | .874 | 25 | .381 | .487 | 125 | .174 | .228 |
| 6 | .707 | .834 | 26 | .374 | .478 | 150 | .159 | .208 |
| 7 | .666 | .798 | 27 | .367 | .470 | 200 | .138 | .181 |
| 8 | .632 | .765 | 28 | .361 | .463 | 300 | .113 | .148 |
| 9 | .602 | .735 | 29 | .355 | .456 | 400 | .098 | .128 |
| 10 | .576 | .708 | 30 | .349 | .449 | 500 | .088 | .115 |
| 11 | .553 | .684 | 35 | .325 | .418 | 1000 | .062 | .081 |
| 12 | .532 | .661 | 40 | .304 | .393 | | | |
| 13 | .514 | .641 | 45 | .288 | .372 | | | |
| 14 | .497 | .623 | 50 | .273 | .354 | | | |
| 15 | .482 | .606 | 60 | .250 | .325 | | | |
| 16 | .468 | .590 | | | | | | |
| 17 | .456 | .575 | | | | | | |
| 18 | .444 | .561 | | | | | | |
| 19 | .433 | .549 | | | | | | |
| 20 | .423 | .537 | | | | | | |

df = N - 2

**Tabelle 10**
**Fishers Z-Werte für Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten**

| $r_{xy}$ | Z | $r_{xy}$ | Z | $r_{xy}$ | Z | $r_{xy}$ | Z | $r_{xy}$ | Z |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| .00 | .00 | .20 | .20 | .40 | .42 | .60 | .69 | .80 | 1.10 |
| .01 | .01 | .21 | .21 | .41 | .44 | .61 | .71 | .81 | 1.13 |
| .02 | .02 | .22 | .22 | .42 | .45 | .62 | .73 | .82 | 1.16 |
| .03 | .03 | .23 | .23 | .43 | .46 | .63 | .74 | .83 | 1.19 |
| .04 | .04 | .24 | .24 | .44 | .47 | .64 | .76 | .84 | 1.22 |
| .05 | .05 | .25 | .26 | .45 | .48 | .65 | .78 | .85 | 1.26 |
| .06 | .06 | .26 | .27 | .46 | .50 | .66 | .79 | .86 | 1.29 |
| .07 | .07 | .27 | .28 | .47 | .51 | .67 | .81 | .87 | 1.33 |
| .08 | .08 | .28 | .29 | .48 | .52 | .68 | .83 | .88 | 1.38 |
| .09 | .09 | .29 | .30 | .49 | .54 | .69 | .85 | .89 | 1.42 |
| .10 | .10 | .30 | .31 | .50 | .55 | .70 | .87 | .90 | 1.47 |
| .11 | .11 | .31 | .32 | .51 | .56 | .71 | .89 | .91 | 1.53 |
| .12 | .12 | .32 | .33 | .52 | .58 | .72 | .91 | .92 | 1.59 |
| .13 | .13 | .33 | .34 | .53 | .59 | .73 | .93 | .93 | 1.66 |
| .14 | .14 | .34 | .35 | .54 | .60 | .74 | .95 | .94 | 1.74 |
| .15 | .15 | .35 | .37 | .55 | .62 | .75 | .97 | .95 | 1.83 |
| .16 | .16 | .36 | .38 | .56 | .63 | .76 | 1.00 | .96 | 1.95 |
| .17 | .17 | .37 | .39 | .57 | .65 | .77 | 1.02 | .97 | 2.09 |
| .18 | .18 | .38 | .40 | .58 | .66 | .78 | 1.05 | .98 | 2.30 |
| .19 | .19 | .39 | .41 | .59 | .68 | .79 | 1.07 | .99 | 2.65 |

**Tabelle 11**
**Maximalwerte für Kontingenzkoeffizienten**

| K | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_{max}$ | 0.707 | 0.816 | 0.866 | 0.894 | 0.913 | 0.926 | 0.935 | 0.943 | 0.949 | |
| K | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $C_{max}$ | 0.953 | 0.957 | 0.961 | 0.964 | 0.966 | 0.968 | 0.970 | 0.972 | 0.973 | 0.975 |
| K | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 100 |
| $C_{max}$ | 0.977 | 0.979 | 0.981 | 0.982 | 0.983 | 0.986 | 0.987 | 0.989 | 0.990 | 0.995 |

**Tabelle 12**
**Kritische Werte für den Zähler des Konkordanzkoeffizienten**

| | N | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | | | Werte auf dem 5%-Verläßlichkeitsniveau | | | |
| 3 | | | 64.4 | 103.9 | 157.3 | 253.3 |
| 4 | | 49.5 | 88.4 | 143.3 | 217.0 | 336.0 |
| 5 | | 62.6 | 112.3 | 182.4 | 276.2 | 420.0 |
| 6 | | 75.7 | 136.1 | 221.4 | 335.2 | 514.1 |
| 8 | 48.1 | 101.7 | 183.7 | 299.0 | 453.1 | 672.0 |
| 10 | 60.0 | 127.8 | 231.2 | 376.7 | 571.0 | 840.0 |
| 15 | 89.8 | 192.9 | 349.8 | 570.5 | 864.9 | 1228.5 |
| 20 | 119.7 | 258.0 | 468.5 | 764.4 | 1158.7 | 1680.0 |
| | | | Werte auf dem 1%-Verläßlichkeitsniveau | | | |
| 3 | | | 75.6 | 122.8 | 185.6 | 332.6 |
| 4 | | 61.4 | 109.3 | 176.2 | 265.0 | 443.5 |
| 5 | | 80.5 | 142.8 | 229.4 | 343.8 | 556.5 |
| 6 | | 99.5 | 176.1 | 282.4 | 422.6 | 665.3 |
| 8 | 66.8 | 137.4 | 242.7 | 388.3 | 579.9 | 887.0 |
| 10 | 85.1 | 175.3 | 309.1 | 494.0 | 737.0 | 1092.0 |
| 15 | 131.0 | 269.8 | 475.2 | 758.2 | 1129.5 | 1701.0 |
| 20 | 177.0 | 364.2 | 641.2 | 1022.2 | 1521.9 | 2184.0 |

**Tabelle 13**
**Kritische Werte für den $F_{max}$-Test**

| df | Fläche | Anzahl der Varianzen | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 4 | 0.95 | 9.60 | 15.5 | 20.6 | 25.2 | 29.5 | 33.6 | 37.5 | 41.4 | 44.6 |
| | 0.99 | 23.2 | 37 | 49 | 59 | 69 | 79 | 89 | 97 | 106 |
| 5 | 0.95 | 7.15 | 10.8 | 13.7 | 16.3 | 18.7 | 20.8 | 22.9 | 24.7 | 26.5 |
| | 0.99 | 14.9 | 22 | 28 | 33 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 |
| 6 | 0.95 | 5.82 | 8.38 | 10.4 | 12.1 | 13.7 | 15.0 | 16.3 | 17.5 | 18.6 |
| | 0.99 | 11.1 | 15.5 | 19.1 | 22 | 25 | 27 | 30 | 32 | 34 |
| 7 | 0.95 | 4.99 | 6.94 | 8.44 | 9.70 | 10.8 | 11.8 | 12.7 | 13.5 | 14.3 |
| | 0.99 | 8.89 | 12.1 | 14.5 | 16.5 | 18.4 | 20 | 22 | 23 | 24 |
| 8 | 0.95 | 4.43 | 6.00 | 7.18 | 8.12 | 9.03 | 9.78 | 10.5 | 11.1 | 11.7 |
| | 0.99 | 7.50 | 9.9 | 11.7 | 13.2 | 14.5 | 15.8 | 16.9 | 17.9 | 18.9 |
| 9 | 0.95 | 4.03 | 5.34 | 6.31 | 7.11 | 7.80 | 8.41 | 8.95 | 9.45 | 9.91 |
| | 0.99 | 6.54 | 8.5 | 9.9 | 11.1 | 12.1 | 13.1 | 13.9 | 14.7 | 15.3 |

| df für | Fläche | Anzahl der Varianzen 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0.95 | 3.72 | 4.85 | 5.67 | 6.34 | 6.92 | 7.42 | 7.87 | 8.28 | 8.66 |
| | 0.99 | 5.85 | 7.4 | 8.6 | 9.6 | 10.4 | 11.1 | 11.8 | 12.4 | 12.9 |
| 12 | 0.95 | 3.28 | 4.16 | 4.79 | 5.30 | 5.72 | 6.09 | 6.42 | 6.72 | 7.00 |
| | 0.99 | 4.91 | 6.1 | 6.9 | 7.6 | 8.2 | 8.7 | 9.1 | 9.5 | 9.9 |
| 15 | 0.95 | 2.86 | 3.54 | 4.01 | 4.37 | 4.68 | 4.95 | 5.19 | 5.40 | 5.59 |
| | 0.99 | 4.07 | 4.9 | 5.5 | 6.0 | 6.4 | 6.7 | 7.1 | 7.3 | 7.5 |
| 20 | 0.95 | 2.46 | 2.95 | 3.29 | 3.54 | 3.76 | 3.94 | 4.10 | 4.24 | 4.37 |
| | 0.99 | 3.32 | 3.8 | 4.3 | 4.6 | 4.9 | 5.1 | 5.3 | 5.5 | 5.6 |
| 30 | 0.95 | 2.07 | 2.40 | 2.61 | 2.78 | 2.91 | 3.02 | 3.12 | 3.21 | 3.29 |
| | 0.99 | 2.63 | 3.0 | 3.3 | 3.4 | 3.6 | 3.7 | 3.8 | 3.9 | 4.0 |
| 60 | 0.95 | 1.67 | 1.85 | 1.96 | 2.04 | 2.11 | 2.17 | 2.22 | 2.26 | 2.30 |
| | 0.99 | 1.96 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.4 | 2.5 | 2.5 | 2.6 | 2.6 |
| ∞ | 0.95 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| | 0.99 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |

**Tabelle 14**

**Prozentränge und Skalenplätze nach Hull**

| $R_{\%}$ | S | $R_{\%}$ | S | $R_{\%}$ | S | $R_{\%}$ | S | $R_{\%}$ | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.09 | 0.1 | 6.81 | 2.1 | 32.42 | 4.1 | 71.14 | 6.1 | 94.49 | 8.1 |
| 0.20 | 0.2 | 7.55 | 2.2 | 34.25 | 4.2 | 72.85 | 6.2 | 95.08 | 8.2 |
| 0.32 | 0.3 | 8.33 | 2.3 | 36.15 | 4.3 | 74.52 | 6.3 | 95.62 | 8.3 |
| 0.45 | 0.4 | 9.17 | 2.4 | 38.06 | 4.4 | 76.12 | 6.4 | 96.11 | 8.4 |
| 0.61 | 0.5 | 10.06 | 2.5 | 40.01 | 4.5 | 77.68 | 6.5 | 96.57 | 8.5 |
| 0.78 | 0.6 | 11.03 | 2.6 | 41.97 | 4.6 | 79.17 | 6.6 | 96.99 | 8.6 |
| 0.97 | 0.7 | 12.04 | 2.7 | 43.97 | 4.7 | 80.61 | 6.7 | 97.37 | 8.7 |
| 1.18 | 0.8 | 13.11 | 2.8 | 45.97 | 4.8 | 81.99 | 6.8 | 97.72 | 8.8 |
| 1.42 | 0.9 | 14.25 | 2.9 | 47.98 | 4.9 | 83.31 | 6.9 | 98.04 | 8.9 |
| 1.68 | 1.0 | 15.44 | 3.0 | 50.00 | 5.0 | 84.56 | 7.0 | 98.32 | 9.0 |
| 1.96 | 1.1 | 16.69 | 3.1 | 52.02 | 5.1 | 85.75 | 7.1 | 98.58 | 9.1 |
| 2.28 | 1.2 | 18.01 | 3.2 | 54.03 | 5.2 | 86.89 | 7.2 | 98.82 | 9.2 |
| 2.63 | 1.3 | 19.39 | 3.3 | 56.03 | 5.3 | 87.96 | 7.3 | 99.03 | 9.3 |
| 3.01 | 1.4 | 20.83 | 3.4 | 58.03 | 5.4 | 88.97 | 7.4 | 99.22 | 9.4 |
| 3.43 | 1.5 | 22.32 | 3.5 | 59.99 | 5.5 | 89.94 | 7.5 | 99.39 | 9.5 |
| 3.89 | 1.6 | 23.88 | 3.6 | 61.94 | 5.6 | 90.83 | 7.6 | 99.55 | 9.6 |
| 4.38 | 1.7 | 25.48 | 3.7 | 63.85 | 5.7 | 91.67 | 7.7 | 99.68 | 9.7 |
| 4.92 | 1.8 | 27.15 | 3.8 | 65.75 | 5.8 | 92.45 | 7.8 | 99.80 | 9.8 |
| 5.51 | 1.9 | 28.86 | 3.9 | 67.48 | 5.9 | 93.19 | 7.9 | 99.91 | 9.9 |
| 6.14 | 2.0 | 30.61 | 4.0 | 69.39 | 6.0 | 93.86 | 8.0 | 100.00 | 10.0 |

# Abkürzungen

| | | Formel | Seite | Tab. |
|---|---|---|---|---|
| A | Determinante | | 65 | |
| $a_1$, $a_2$ etc. | Faktoren | | 65 ff. | |
| a, b | Regressionskoeffizienten | 92 – 111 | 47 – 58 | |
| c | Anzahl der Stichproben | | | |
| C | Kontigenzkoeffizient | 83 | 41 | |
| $C_{25}$, $C_{60}$ etc. | 25%-, 60%-Centil | | 3 | |
| $Chi^2$ | Chi-Quadrat | 32 | 12 | 2 |
| CR | kritischer Bruch („Critical Ratio") | | | |
| df | Freiheitsgrade („degrees of freedom") | | | |
| E | Exzeß | 24, 26 | 7 | |
| F | Wert der F-Verteilung | | | 4 |
| f | Häufigkeit („frequency") | | | |
| $f_e$ | erwartete (theoretische) Häufigkeit | | | |
| $f_b$ | beobachtete (empirische) Häufigkeit | | | |
| Fr | Teststatistik für Rangvarianzanalyse nach Friedman | 60 | 25 | 7 |
| H | Teststatistik der Rangvarianzanalyse nach Kruscal & Wallis | 59 | 25 | 6 |
| $h^2$ | Kommunalität | | 67 | |
| HM | harmonisches Mittel | 4 | 2 | |
| K | Urteilskonsistenz | 155 | 97 | |
| MG | geometrisches Mittel | 3 | 1 | |
| Mo | Modal-/Gipfelwert | | 3 | |
| N | Umfang einer Grundgesamtheit | | | |
| n | Umfang einer Stichprobe | | | |
| p | Wahrscheinlichkeit („probability") | | | |
| Phi | Vierfelder-Korrelations-Koeffizient | 80, 81 | 39 f. | |

| | | Formel | Seite | Tab. |
|---|---|---|---|---|
| PR | Prozentrang | 27, 152 | 8, 92 | |
| Q | Prägnanzkoeffizient | 73 | 36 | |
| QD | mittlerer Quartilabstand („Quarter Deviation") | 20 | 6 | |
| QS | Quadratsumme | 126 | 71 | |
| r | Produkt-Moment-Korrelations-Koeffizient | 77 | 38 | |
| $r^{ww}$, $r^{xx}$ etc. | invertierte Elemente einer Korrelationsmatrix | 116 – 118 | 60 – 62 | |
| R | Rang-Korrelations-Koeffizient | 79 | 39 | |
| R | multipler Korrealtions-Koeffizient | 107, 112 | 57 f. | |
| $\overline{R}$ | mittlerer Rang-Korrelations-Koeffizient | 86, 153 | 44, 95 | |
| S | Regressionsgüte | 103 | 56 | |
| Sch | Schiefe | 22, 23, 25 | 7 | |
| SD | Standardabweichung („Standard Deviation") | 6 – 11 | 4 | |
| s | Standardfehler | 37 – 45, 47 | 17 f. | |
| t | Wert der t-Verteilung | | | 3 |
| $T_w$ | Teststatistik für Wilcoxen-Test | 61 | 27 | 8 |
| U | Teststatistik für Rangsummentest | 56 | 23 | 5 |
| Ü | Urteilsübereinstimmung | 151 | 90 | |
| V | Varianz | 14 – 19 | 5 f. | |
| VA | Varianzaufklärung | 78, 130 | 38, 72 | |
| VB | Vertrauensbereich | 46 | 18 | |
| VK | Variabilitätskoeffizient | 21 | 6 | |
| W | Konkordanz-Koeffizient | 85 | 44 | |
| $\overline{X}$ | arithmetisches Mittel | 1, 2 | 1 | |
| z | Standardwert | 28 | 8 | 1 |
| Z | Fishers Z-Transformation einer Produkt-Moment-Korrelation | 88 | 45 | 10 |
| Z | Zentralwert, Median | 5 | 2 | |

# Literaturhinweise

Die nachstehend angeführte Literatur ist die vor allem vom Verfasser benutzte. Das Verzeichnis ist keine auch nur einigermaßen repräsentative Bibliographie. Einen guten Überblick über die neuere Literatur findet man z.B. bei Bortz.


Aiken, L.R.: Some simple computational formulas for multiple regression. In: Educational and Psychological Measurement, 34, 1974, p.767 - 769.

Basler, H.: Aufgabensammlung zur statistischen Methodenlehre u. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Würzburg, Wien 1975.

Benninghaus, H.: Deskriptive Statistik, Stuttgart 1974.

Bortz, J.: Lehrbuch der Statistik für Sozialwissenschaftler. Berlin u.a. 1977.

Bradley, J.: Probability, decision, statistics. Englewood Cliffs 1976.

Clauß, G., u. Ebner, H.: Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen u. Soziologen. Zürich, Frankfurt a.M.$^{2}$ 1975.

Christmann, G.: Statistische Verfahren. Baden-Baden $^{2}$1973.

Gaensslen, H., u. Schubö, W.: Einfache u. komplexe statistische Analyse. München, Basel $^{2}$1976.

Gotkin, L.G., u. Goldstein, L.S.: Grundkurs in Statistik. Ein programmiertes Lehrbuch in 2 Bänden. München, Wien $^{2}$1969.

Hamm, G.: Methodenlehre der Statistik. München 1974.

Hays, W.L.: Statistics for the Social Sciences. 2nd. Ed. London u.a. 1978

Hofstätter, P.R., u. Wendt, D.: Quantitative Methoden der Psychologie. Frankfurt a.M. $^{4}$1974.

Krauth, J., u. Lienert, G.A.: KFA - Die Konfigurationsfrequenzanalyse. Freiburg 1973.

Kreyszig, E.: Statistische Methoden u. ihre Anwendung. Göttingen $^{4}$1973.

Lippe, P.: Einführung in die Statistik und den Umgang mit statistischen Daten. München 1974.

Lohnes, P.R., u. Cooley, W.W.: Einführung in die Statistik mit EDV-Übungen. Hannover 1976.

Morony, M.J.: Einführung in die Statistik. München, Wien 1970.

Sachs, L.: Statistische Auswertungsmethoden. Berlin u.a. $^{3}$1972.

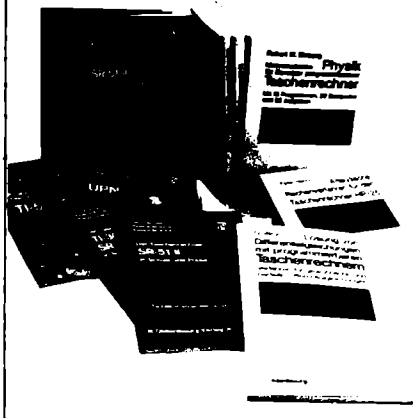
Sixtl. F.: Meßmethoden der Psychologie. Weinheim 1967.

# Sachregister

Es wird nur auf Fundstellen im Theorie-Teil verwiesen. Zugehörige Programme sind dort mit der entsprechenden Nummer benannt.


Bartlett-Test 74
Binomial-Verteilung 10
Centil 3
Chi-Quadrat
  Probe 12
  Näherungswerte 13
Cochran-Test 33, 99
Distanz-Matrix 90
Dominanz-Matrix 96
Exzeß 7
Faktoren-Analyse
  Korrelations-Matrix 63
  Faktorisierbarkeit 64
  Extraktion der Faktoren 65
  Rotation der Faktoren 68
Fehler
  Alpha-Fehler 16
  Beta-Fehler 16
  Standardfehler 17
F-Max-Test 75
Gipfelwert 3
Guttmann-Skala 93
H-Test 25
Hull, Skalierung nach 100
Konfigurationsfrequenzanalyse 34
Konkordanz-Koeffizient 43
Kommunalität 64, 67
Konsistenz der Urteile 96
Kontingenz-Koeffizient 41
Kontingenz-Tafel 30
Korrelation
  Produkt-Moment-K. 38
  Rang-K. 39
  durchschnittliche Rang-K. 95
  $K_c$ mit dichotomen Variablen 41
  mittlere K. 45
  Partial-K. 45
  multiple K. 56
  K.-Matrix 63
Likert-Skala 91
McNemar-Test 32
Median 2
Median-Test 28
Modalwert 3
Mittel
  arithmetisches 1
  geometrisches 1
  harmonisches 1
Normalverteilung 9
Normalitätsprüfung 14
Paarvergleich 90
Phi-Koeffizient 39
Poissonverteilung 11
Prägnanz 36
Prozentrang 8
Quartilabstand, mittlerer 6
Rangordnung durch Paarvergleich 96
Rangordnungsverfahren 94
Rang-Varianz-Analyse
  nach Friedman 25
  nach Kruscal und Wallis : H-Test 25
Rating 89
Regression
  lineare 47
  quadratische 49
  kubische 50
  Potenz-$R_c$ 52
  Exponential-R. 54
  logarithmische R. 55
  R.-Güte 56
  multiple 56
Scheffé-Test 73,77,83,87
Schiefe 7
Skalen, Arten 19
Standardabweichung 4
Standardwert 8
Streuung 4
t-Test für unabhängige Stichproben 20
  für abhängige Stichproben 21
Übereinstimmung von Urteilen 90
U-Test 23
Variabilitäts-Koeffizient 6
Varianz 5, 22
Varianz-Analyse
  1-faktorielle V. 71
  2-faktorielle V. 75
  1-faktorielle V. mit Meßwiederholung 82
  2-faktorielle V. mit Meßwiederholung 85
  V. mit ungleichen Stichproben 79
Varianzaufklärung 38,69,72,77
Vertrauensbereich 17
Vierfeldertafel 29
Vorzeichen-Test 27
Wilcoxen-Test 26
Zentralwert 2

# ...es steckt mehr drin als Sie ahnen



Robert M. Eisberg

**Mathematische Physik für Benutzer programmierbarer Taschenrechner**

1978. 189 Seiten, 49 Abbildungen, 16 Programme, 29 Beispiele, 92 Aufgaben, DM 29,80 ISBN 3-486-21621-X

Das amerikanische Original übersetzten Regine Eichler und Wolfgang Georgi

Aus dem Inhalt: Numerische Differentiation – Numerische Integration – Numerische Lösung von Differentialgleichungen – Oszillatoren – Bewegungsgleichungen – Zufallsprozesse – Schroedinger-Gleichung.

Differentialgleichungen als Werkzeug für die Lösung von physikalischen Problemen: dieses Buch bringt eine Reihe von ausgearbeiteten Programmen, die zeigen, wie Differentialgleichungen numerisch mit programmierbaren Taschenrechnern behandelt werden können. Jedem Abschnitt geht eine kurze Einführung in die Theorie voraus. Die Programme sind jeweils in zwei Versionen angegeben: für Rechner mit algebraischer und mit umgekehrt polnischer Notation.

Oldenbourg

taschenrechner

taschenrechner

**...es steckt mehr drin als Sie ahnen**

Nehmen Sie das Buch und Ihren Taschenrechner. Sie sehen, daß Sie die eigenen Rechenprobleme schnell und sicher lösen lernen, daß Sie ohne Vorkenntnisse programmieren können und damit die Möglichkeiten Ihres Taschenrechners voll ausschöpfen.

Richard Eckert

**Die Programmierbaren von HP**

1979. 204 Seiten, 98 Beispiele und 62 Programme,
DM 26,80 ISBN 3-486-23491-9

Programmierbare Taschenrechner sind ein ausgezeichnetes Werkzeug, mit dem sich auch komplexe Rechnungen überraschend einfach lösen lassen. Das Buch wendet sich nun an alle diejenigen, die über einen programmierbaren Taschenrechner verfügen, aber trotz Studium des jeweiligen Bedienungshandbuches die praktische Anwendung weiterhin schwierig finden.

P. Henrici

**Analytische Rechenverfahren für den Taschenrechner HP-25**

1978. 214 Seiten, 35 Flußdiagramme
DM 29,80 ISBN 3-486-22791-2
35 Programme zu den Gebieten Zahlentheorie, Iteration, Polynome, Potenzreihen, Integration, Spezielle Konstanten und Funktionen.

G. Venz

**Lösung von Differentialgleichungen mit programmierbaren Taschenrechnern**

1978. 147 Seiten, 43 Abbildungen,
DM 26,80 ISBN 3-486-21791-7
Verfahren für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen: 18 Programme

Oldenbourg

Dieses Buch richtet sich hauptsächlich an Leser, die empirisch arbeiten möchten. Es ist daher betont pragmatisch konzipiert.

Der 1. Teil bietet eine leichtverständliche Übersicht über die wichtigsten Verfahren und Tests der Statistik mit zahlreichen Beispielrechnungen. Der 2. Teil enthält je 54 gebrauchsfertige Programme für Rechner mit Algebraischer Eingabelogik (AOS bzw. AEL) und Umgekehrter Polnischer Notation (UPN). Diese Programme laufen auf allen handelsüblichen Rechnern. Der 3. Teil besteht aus 14 Tabellen, die für die statistische Alltagsarbeit unerläßlich sind.

Diese Anlage erlaubt einen raschen und rationellen Zugriff auf die üblichen statistischen Verfahren.

Oldenbourg Verlag ISBN 3-486-20762-8